N° D'ENREGISTREMENT
AU C. N. R. S.
A. O. 1814

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences

de l'Université de Paris

POUR OBTENIR LE GRADE

DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Mlle Annie BAGLIN

1re THÈSE : De l'évolution des étoiles dégénérées chaudes.

2e THÈSE : Propositions données par la Faculté :
Les étoiles β Canis Majoris.

Soutenues le 9 Novembre 1967 devant la commission d'examen :

MM. SCHATZMAN *Président.*
PECKER
RÖSCH *Examinateurs.*
ZAHN

ÉDITIONS DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
15, Quai Anatole France
PARIS 7e

N° D'ENREGISTREMENT
AU C. N. R. S.
A. O. 1814

THÈSES

PRÉSENTÉES

à la Faculté des Sciences

de l'Université de Paris

POUR OBTENIR LE GRADE

DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

M^lle Annie BAGLIN

1^re THÈSE : De l'évolution des étoiles dégénérées chaudes.

2^e THÈSE : Propositions données par la Faculté :
Les étoiles β Canis Majoris.

Soutenues le 9 Novembre 1967 devant la commission d'examen :

MM. SCHATZMAN *Président.*
PECKER
RÖSCH } *Examinateurs.*
ZAHN

ÉDITIONS DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
15, Quai Anatole France
PARIS 7^e

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

STABILITÉ VIBRATIONNELLE ET ÉVOLUTION SÉCULAIRE DES ÉTOILES DÉGÉNÉRÉES CHAUDES

Annie BAGLIN

Institut d'Astrophysique, Paris.

RÉSUMÉ. — *On étudie ici la stabilité vibrationnelle et l'évolution séculaire d'une naine blanche dont la température centrale est élevée — comprise approximativement entre* 10^8 *et* 10^9 °K.

Les différents mécanismes de perte d'énergie qui ont un rôle stabilisateur sont étudiés.

En admettant l'existence de l'interaction directe $(e\nu_e)$, $(e\nu_e)$, *on détermine le taux de production de neutrinos par déexcitation des oscillations de plasma sous la forme dérivée par* REEVES (1965).

Les réactions de radioactivité β *directes et inverses sont étudiées. Le taux de perte d'énergie est calculé, en utilisant une approximation, au premier ordre en fonction de la température, des écarts à la distribution de Fermi.*

Le rôle des couches superficielles, partiellement dégénérées, où la diffusion Compton domine l'opacité, est étudiée. Ces régions jouent en général un rôle plus important que l'enveloppe extérieure constituée de gaz parfait dont la contribution a été étudiée par LEDOUX *et* SAUVENIER GOFFIN (1950).

Les deux premiers mécanismes permettent d'associer à ces objets une très grande luminosité neutrinique, ce qui leur assure une durée de vie assez courte.

L'amortissement des oscillations radiales correspondant à ces phénomènes est grand et, en général, supérieur à l'amortissement radiatif précédemment calculé, dans lequel l'interaction $(e\nu_e)$ $(e\nu_e)$ *n'avait pas été envisagée.*

Quelques doutes subsistent sur l'existence de l'interaction directe électron-neutrino.

Si elle est effectivement rencontrée dans la nature, elle joue un rôle très important dans la structure et l'évolution de tels objets, puisqu'elle renforce l'intensité d s caractéristiques citées ici. En particulier, l'importance de l'amortissement radiatif dû à ces processus de perte d'énergie permet, dès que la température centrale dépasse 10^8 *degrés, les réactions thermonucléaires dans les étoiles dégénérées. — Ceci infirme les conclusions de* LEDOUX (1950) *qui ne tenait compte que de l'amortissement radiatif.*

SUMMARY. — *The vibrational and secular stability of high central temperature white dwarfs is studied.*

Different mechanisms leading to energy losses are considered. The neutrino production rate by plasma oscillations is determined using formula given by REEVES (1965).

The energy loss rate from β^- *radioactivity reactions is calculated using an approximation to the first order in* T *for the discrepancy from the Fermi distribution.*

The influence of partially degenerated outer-layers, where Compton scattering is predominant is calculated. These regions are usually more important than the outer enveloppe studied by LEDOUX *and* SAUVENIER GOFFRIN (1950). *The two first mecanisms lead to a very high neutrino luminosity corresponding to a short lifetime.*

Damping of radial oscillations is larger than the radiative damping considered earlier.

So, if the (e, ν_e) (e, ν_e) *interaction is real, it plays an important role during the evolution of hot white dwarfs.*

The main result is that, due to the high damping, distabilizing thermonuclear reactions are possible as long a T *is larger than* 2.10^8 *degrees.*

Nous nous intéressons ici comme dans les articles précédents, BAGLIN (1965 et 1966) à des objets fortement dégénérés, mais chauds.

La structure de ces modèles est décrite dans BAGLIN (1965). Il est apparu que les modèles de très haute température ($T \sim 10^8$ à 10^9 degrés) et de haute densité $\varphi \simeq 10^8$ g cm^{-3} peuvent être le siège de réactions de radioactivité β^- directes et inverses et aussi de la production de neutrinos grâce à l'interaction $(e\nu_e)$ $(e\nu_e)$. Ces réactions qui

conduisent toutes deux à une perte d'énergie pour l'étoile jouent donc un rôle à la fois dans l'évolution séculaire et dans la stabilité vibrationnelle de ces objets.

On peut s'attendre à ce que la durée de vie des objets diminue et que les oscillations y soient plus amorties. En particulier l'étude de la stabilité vibrationnelle faite par LEDOUX et SAUVENIER GOFFIN en 1950 ne tenait compte que de l'amortissement radiatif des couches extérieures. A cette époque en effet, l'intéraction $(e\nu_e, e\nu_e)$ n'avait pas été envisagée. L'amortissement étant plus fort, les conclusions de LEDOUX sont un peu modifiées.

Dans la première partie nous étudierons chacun des processus de perte et de production d'énergie et nous calculerons les taux correspondants ; puis dans la deuxième partie nous discuterons leur influence sur la stabilité vibrationnelle ; enfin dans une troisième partie nous esquisserons leurs conséquences sur l'évolution séculaire.

I. LES PROCESSUS DE PERTE ET DE PRODUCTION D'ÉNERGIE.

Les phénomènes dissipatifs tels que viscosité et turbulence étant négligés, les mécanismes de production ou de perte d'énergie qui se produisent dans un gaz dégénéré et chaud peuvent être les suivants :

1) Les réactions thermonucléaires. En supposant que ces étoiles sont dans une phase évolutive correspondant à un refroidissement général, toutes ces réactions ont déjà eu lieu dans les phases précédentes et ne trouvent plus une température suffisante pour se produire.

2) A cause des très grandes densités atteintes au cours de la dégénérescence des réactions du type pycnonucléaire peuvent être envisagées.

3) A ces grandes densités, l'énergie de Fermi des électrons est considérable. Elle leur permet de prendre part à des captures nucléaires. Nous verrons que ces réactions jouent un rôle important dans les modèles étudiés.

4) Si l'interaction directe électron-neutrino $(e\nu_e)$ $(e\nu_e)$ existe, des neutrinos sont produits par l'excitation des modes collectifs du plasma à ces hautes températures et peuvent être une source importante de libération d'énergie à l'extérieur de l'étoile.

Nous allons examiner successivement ces trois derniers processus. Il est nécessaire pour cela, de connaître la composition chimique de la matière stellaire.

Au cours de son évolution, la température de l'étoile a augmenté régulièrement. Puis, quand la dégénérescence des électrons s'est installée dans la région centrale, la température a augmenté plus lentement et est passée par un maximum. Pour déterminer la composition de la matière, il faut avoir un ordre de grandeur de ce maximum de température qui permet de savoir quelles sont les phases de combustion nucléaire qui ont pu se produire dans le passé de l'étoile.

Estimation du maximum de température atteint au cours de l'évolution d'une étoile de masse voisine de 1 $M_\odot$.

Quand la densité au centre de l'étoile augmente, la dégénérescence des électrons s'installe.

La pression totale est la somme de la pression des ions et de la pression dégénérée des électrons.

$$P = \frac{\mathcal{R}\rho T}{A} + P_e. \tag{1}$$

Lorsque la densité est assez faible, ce qui est le cas au départ de la dégénérescence, on écrit P_e sous la forme approchée

$$P_e = K_2 \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5,3} \quad \text{SCHATZMAN (1958)} \tag{2}$$

μ_e est la masse molaire par électron libre et K_2 une constante. Avec $\mu_e \simeq 2$ on a :

$$K_2\, \mu_e^{-5/3} = 10^{12.49} \text{ c. g. s.},$$

soit

$$P = \frac{\mathcal{R}\rho T}{A} + \frac{K_2}{\mu_e^{5/3}}\, \rho^{5/3} \tag{3}$$

et en particulier au centre, la pression P_c est donnée par

$$P_c = \frac{\mathcal{R}\rho_c T_c}{A} + K_2 \left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3} \rho_c^{5/3}. \tag{4}$$

En admettant que la structure hydrostatique de l'étoile reste bien représentée par un polytrope d'indice 1,5, la pression centrale est reliée à la densité par la relation

$$P_c = p\rho_c^{4/3} \tag{5}$$

avec

$$p = \frac{8\pi G}{5} \left[-4\pi \left(\xi^2 \Big/ \frac{d\theta}{d\xi}\right)\right] M^{2/3} \tag{6}$$

ξ et θ sont les variables polytropiques.

L'indice 1 indique la valeur prise à la surface du polytrope. Pour $M = 1\ M_\odot$

$$p = 10^{14.62} \text{ c. g. s.},$$

on a donc la relation entre ρ_c et T_c

$$(7) \qquad \frac{\mathcal{R}\rho_c T_c}{A} + K_2 \left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3} \rho_c^{5/3} = p\rho_c^{4/3}$$

et la température est donnée par l'expression :

$$(8) \qquad T_c = p \frac{A}{\mathcal{R}} \rho_c^{1/3} - K_2 \frac{A}{\mathcal{R}} \left(\frac{Z}{A}\right)^{5/3} \rho_c^{2/3}$$

qui montre que lorsque ρ_c augmente, T_c passe par un maximum T_m obtenu pour

$$\rho_c^{1/3} = \frac{p}{2K_2} \left(\frac{A}{Z}\right)^{5/3}$$

soit :

$$T_m = \frac{p^2}{4K_2} \left(\frac{A}{Z}\right)^{5/3} \frac{A}{\mathcal{R}}.$$

Avec les valeurs de p et K_2 déterminées plus haut et $A \simeq 24$ on obtient un maximum de température de l'ordre de $4\ 10^9$ degrés.

En admettant une répartition polytropique des températures, on voit qu'une grande partie de la masse de l'étoile (80 à 90 %) a été soumise à une température supérieure à $0.8\ 10^9$ degrés qui est la température d'amorçage de la combustion carbone.

On peut donc supposer que dans au moins 80 % de la masse totale une combustion de carbone a eu lieu.

Pour une étoile de masse comprise entre 1 $M_\odot$ et 1,3 $M_\odot$, il semble raisonnable d'admettre avec Deinzer et Salpeter (1964) que la combustion de l'hélium a produit 55 % de carbone et 45 % d'oxygène.

La phase de combustion du carbone par la réaction $C^{12} + C^{12}$ donne à peu près 10 % de Na^{23}, 60 % de $Mg^{24,25,26}$, 30 % de Ne^{20} (Deinzer et Salpeter (1965), Reeves (1962)).

C'est pourquoi, nous avons choisi, comme composition chimique pour les régions centrales des étoiles dégénérées :

6 %	Na^{23}
33 %	$Mg^{24,25,26}$
16 %	Ne^{20}
45 %	O^{16}

a) *Sur la possibilité de réactions pycnonucléaires.*

A cause de la très haute densité du milieu les réactions de fusion nucléaire peuvent se produire grâce à la diminution de l'épaisseur de la barrière de potentiel due à la grande densité des électrons.

Dans ces conditions, le taux de réaction dépend très peu de l'énergie des particules qui entrent en réaction mais, seulement, de l'épaisseur de la barrière qui est fonction de la densité.

De telles réactions furent étudiées par Cameron (1959) sous le nom de réaction pycnonucléaires.

Il a calculé le taux de la réaction $C^{12} + C^{12}$ en fonction de la densité (fig. 1), la forme de la barrière de potentiel est celle donnée par Schatzman (1948) qui montre qu'à de telles densités, l'effet des électrons est équivalent à celui d'une mer uniforme d'électricité négative. Elle est cependant légèrement modifiée pour tenir compte des collisions non centrales. Dans ce calcul numérique la particule incidente a pour énergie I ke V. Dans les conditions qui nous intéressent il serait plus approprié de prendre les 100 ke V, mais les résultats sont cependant valables car ils dépendent peu de l'énergie incidente.

La réaction devient totale pour $\rho > 10^{9.8}$ g cm^{-3} (fig. 1).

La valeur un peu différente de la section de choc utilisée par Reeves (1963) augmente la probabilité de transition et ramène la densité critique à $10^{9.5}$ g cm^{-3}.

De toute façon, ceci montre que même les réactions d'éléments assez légers se produisent à des densités qui ne sont pas atteintes dans des états stables.

Il ne peut donc se produire aucune réaction de ce type dans les modèles étudiés. Par contre elles pourraient avoir lieu dans la phase ultérieure d'effondrement gravitationnel.

b) *Taux de production de paires neutrinos-antineutrinos par déexcitation des oscillations de plasma.*

Le taux de production d'énergie ε_{p_ν} par g pour ce processus est donné par Reeves (1965). Il croît très rapidement avec la température et présente un maximum pour les densités comprises entre 10^7 et 10^8 g cm^{-3}.

L'expression de ε_{p_ν} est différente selon que

$$\frac{\hbar\omega_p}{kT} \ll 1 \text{ ou } \frac{\hbar\omega_p}{kT} \gg 1$$

ω_p étant la fréquence de plasma.

Dans le cas d'un gaz fortement dégénéré on peut écrire :

$$(9) \qquad \frac{\hbar\omega_p}{m_e c^2} = 5.62\ 10^{-5} \left(\frac{\rho}{\mu_e}\right)^{5/3} [1 + 1.01\ 10^{-4} (\rho/\mu_e)^{2/3}]^{-1/}$$

En utilisant le paramètre x défini par Chandrasekhar (1939), la densité s'écrit, en négligeant le

rôle de la température, $\rho = \mathcal{B}\,\mu_e\,x^3$, $\mathcal{B}$ étant une constante ($\mathcal{B} = 9.74\ 10^5$ c.g.s.).

On transforme alors la relation (9) pour exprimer ω_p en fonction de x, soit :

$$\frac{\hbar\omega_p}{m_e c^2} = 10^{-1.256}\, x^{1.5}(1 + x^2)^{-0.25}$$

qui avec l'hypothèse $x \gg 1$ permet d'écrire

$$(10) \qquad \frac{\hbar\omega_p}{kT} = 0.35\,\frac{x}{T_9} \qquad (T_9 = 10^{-9}\ T).$$

Puisque nous nous intéressons à des densités telles que $x \gg 1$ et des températures telles que $T_9 < 2$ l'inégalité

$$\frac{\hbar\omega_p}{kT} \gg 1$$

est toujours vérifiée.

Dans ces conditions $\varepsilon_{p\nu}$ prend la forme :

$$(11) \qquad \varepsilon_{p\nu} = 1.54\ 10^{22}\,\rho^{-1}\left(\frac{\hbar\omega_p}{m_e c^2}\right)^{7.5}\left(\frac{kT}{m_e c^2}\right)^{1.5}\exp\left(-\frac{\hbar\omega_p}{kT}\right)$$

qui s'écrit à l'aide des paramètres x et T_9

$$(12) \qquad \varepsilon_{p\nu} = 10^{5.319}\, x^{4.5}\, T_9^{1.5}\exp\left(-0.33\,\frac{x}{T_9}\right).$$

c) *Étude du taux de réaction de capture électronique et radioactivité* β−, *et de la production d'énergie associée*

Les seules réactions nucléaires se produisant dans la phase de contraction et de refroidissement des étoiles dégénérées considérées ici sont des réactions de capture électronique et de radioactivité β− du type :

I) $\quad (A, Z) + e \rightarrow (A, Z - 1) + \nu$

II) $\quad (A, Z - 1) \rightarrow (A, Z) + \bar{\nu} + e.$

En effet, lorsque dans un milieu composé d'une espèce chimique (A, Z) à une densité et une température telle que les électrons y sont très fortement dégénérés, la densité devient assez grande pour que certains électrons atteignent l'énergie du seuil de capture électronique de l'ion (A, Z), des captures se produisent formant l'ion (A, Z − 1).

Frank-Kamenetsky (1966) a montré que dans l'hypothèse de la dégénérescence totale ($T = 0$) ce processus est très rapide.

Le phénomène inverse, radioactivité β− de l'ion (A, Z − 1), est interdit par le principe d'exclusion. L'électron qui serait émis a une énergie pour laquelle le degré d'occupation est 1 et ne trouve pas de niveau libre.

Cependant, dès que la dégénérescence n'est plus totale ce phénomène inverse a une probabilité non nulle puisque l'occupation des niveaux n'est plus complète. Il se produit alors un équilibre entre les ions (A, Z) et les ions (A, Z − 1).

De plus, lorsque l'étoile est intéressée par des perturbations dont l'échelle de temps est du même ordre de grandeur que la durée de vie de la radioactivité β− correspondant aux espèces chimiques envisagées, l'état d'équilibre n'est pas atteint. Ceci se produit lorsqu'une étoile approche la limite de la stabilité dynamique, sa période diminue et devient à un certain moment de l'ordre de la durée de vie de radioactivité β−.

Dans le cas d'une oscillation un déphasage peut se produire entre la variation de la densité et la variation des concentrations qui induit alors un déphasage sur la production d'énergie.

Les réactions de capture se produisent sur les électrons d'énergie supérieure à l'énergie de Fermi, et les radioactivités directes libèrent des électrons qui viennent occuper les quelques états dont l'énergie est inférieure au seuil, qui sont restés libres à cause de la légère altération de la distribution de Fermi due à la température élevée.

Ce sont donc les écarts à la distribution de Fermi qui interviennent ici.

Réactions de radioactivité β− *directes et inverses dans le milieu dont la composition chimique a été définie ci-dessus.*

Les caractéristiques de ces réactions sont en général mal connues, sauf quand elles existent naturellement. Endt et Van der Leun (1962) étudient en détail les niveaux d'énergie nucléaire de certaines transitions tandis que Wu et Moczkowski (1966) donnent des valeurs approchées des durées de vie pour chaque type de radioactivité β−.

La probabilité de décroissance β− par seconde est écrite classiquement sous la forme :

$$(13) \qquad W = \frac{m_e c^2}{\hbar}\,\frac{G^2}{2\pi^2}\,|M^2|f$$

où m_e, c, et $\hbar$ sont les constantes ayant leur signification habituelle, G est la constante de l'interaction f ne dépend que de la distribution d'énergie des particules et $|M|^2$ est le carré du module de la matrice d'interaction.

On utilisera dans ce travail la constante nucléaire :

$$(14) \qquad K = \frac{1}{f\tau} = \frac{m_e c^2}{\hbar}\,\frac{G^2}{2\pi^3}\,|M|^2$$

où τ est la durée de vie de l'élément. Elle permet d'écrire W sous la forme simple

$$W = Kf.$$

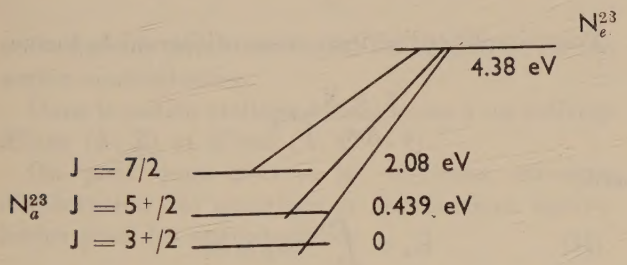
Parmi les éléments composant le milieu stellaire qui nous intéresse seuls Na^{23} et Mg^{24} ont des seuils de décroissance correspondant à des énergies de Fermi inférieures à 5 Me V, c'est-à-dire, des densités inférieures à 10^{10} g cm^{-3}.

Le seuil de Mg^{24} correspond à $\rho = 10^{9.5}$ gcm^{-3}. La densité maximum atteinte dans les modèles dynamiquement stables est de l'ordre de $10^{8.7}$ g cm^{-3}. Dans une telle étoile, il y a donc très peu de particules ayant une énergie suffisante pour participer à ces réactions et Mg^{24} joue un rôle assez peu important.

Malgré l'abondance relativement faible du sodium la réaction intéressante est la réaction d'équilibre entre Na^{23} et Ne^{23}.

$$Na^{23} + e^- \rightarrow Ne^{23} + \nu.$$

Il y a trois transitions permises correspondant aux trois premiers niveaux de Na^{23}, comme le montre le diagramme ci-dessous :



La transition sur le niveau J = 7/2 a un rapport de branchement très faible (1 %) et sera négligée ; nous nous limiterons à l'étude des deux premières transitions dont les rapports de branchement sont 67 % et 32 %. Nous les remplaçons par une transition moyenne. Le tableau II donne les caractéristiques de trois transitions.

Aux températures rencontrées dans les modèles stellaires que nous envisageons ici la population des niveaux excités est négligeable. Toutes les transitions se font à partir du fondamental.

Bilan d'énergie des réactions de radioactivité β directes et inverses.

Soit X la concentration en ions (A, Z), m_0 la masse de l'atome d'hydrogène ; $\frac{\rho X}{A m_0}$ est le nombre d'ions (A, Z) par cm^3 ; A — X est la concentration en ions (A, Z — 1) et $\rho \frac{(1 - X)}{A m_0}$ le nombre d'ions (A, Z — 1) par cm^3.

Soit n_e le nombre d'électrons par cm^3.

On a à chaque instant

$$\frac{\rho}{A m_0} (Z + X - 1) = n_e \qquad (16)$$

et comme $Z \gg |X - 1|$

$$\frac{\rho Z}{A m_0} = n_e. \qquad (17)$$

Soit W_1 la probabilité de capture d'un électron par unité de temps. W_2 la probabilité de radioactivité par ion et par unité de temps.

TABLEAU I

TAUX DE PRODUCTION DE NEUTRINOS PAR DÉSEXCITATION DES OSCILLATIONS DE PLASMAS ET PAR RADIOACTIVITÉ β^- ET INVERSES DIRECTES

T = 10^9

x	log ρ	$\varepsilon_{p\nu}$	$\varepsilon_{R\nu}$
10	9.29	2.254	— 0.188
7.5	8.91	1.830	2.64
7.1	8.85	1.512	— 0.564
5.88	8.67	1.068	— 4.95

T = 10^8

x	log ρ	$\varepsilon_{p\nu}$	$\varepsilon_{R\nu}$
10	9.29	— 11.43	— 38.4
9	9.15	— 9.14	— 11.4
8	9.02	— 9.236	— 6.47
7	8.84	— 8.33	— 39

TABLEAU II

RADIOACTIVITÉ β^- DU SODIUM 23

	ε_* MeV	x_*	$\rho(x_*)$	RAPPORT DE BRANCHEMENT	$\text{Log}_{10} f\tau$
β_0^-	4.39	8.78	1.42 10^9	67	5.25
β_1^-	3.96	7.92	1.01 10^9	32	5.38
β_2^-	2.4	4.8	2.27 10^8	1	5.38

On définit par ion (A, Z) la probabilité de capture $\omega_1(\varepsilon)\, d\varepsilon$ d'un électron d'énergie comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$.

Nous écrivons alors W_1 sous la forme

$$W_1 = \int_{\varepsilon_*}^{\infty} \omega_1(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

De même par ion (A, Z — 1) la probabilité d'émission d'un électron d'énergie comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$ est $\omega_2(\varepsilon) d\varepsilon$ et

$$W_2 = \int_0^{\varepsilon_*} \omega_2(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Le cas de la matière dégénérée est un peu différent des cas traités ordinairement correspondant aux radioactivités naturelles ou à des processus analogues. En effet ici la distribution des niveaux d'énergie des électrons joue un rôle important. En particulier certaines transitions sont interdites par le principe d'exclusion, puisque dans le domaine des basses énergies les niveaux ont un degré d'occupation très voisin de 1. Ceci intervient dans les expressions de ω_1 et ω_2 comme nous le verrons ultérieurement.

Les réactions de capture comme les réactions de radioactivité sont accompagnées de l'émission d'un neutrino qui transportent de l'énergie.

ε_* est l'énergie du seuil de la réaction c'est-à-dire l'énergie totale minimum d'un électron capturé ; $e_* = \varepsilon_* - mc^2$ est le seuil d'énergie de la réaction I c'est-à-dire la différence des énergies de liaison entre l'ion (A, Z — 1) et l'ion (A, Z).

Contribution des réactions de capture au bilan d'énergie produite.

Une partie de l'énergie de l'électron capturé va dans l'énergie de liaison du noyau (A, Z — 1), le reste est transféré au neutrino.

Le nombre de captures par cm³ par unité de temps, d'électrons d'énergie comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$ est $X\omega_1(\varepsilon)\, d\varepsilon$.

L'énergie produite par cm³ par unité de temps dans toutes les captures est :

$$(18) \qquad -\frac{\rho X}{Am_0} \int_{\varepsilon_*}^{\infty} \varepsilon\omega_1(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

que nous écrivons $\dfrac{\rho X}{Am_0} E_1$ en posant

$$(19) \qquad E_1 = \int_{\varepsilon_*}^{\infty} \varepsilon\omega_1(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

Une partie est emportée par le neutrino émis soit

$$(20) \qquad \varepsilon_{\nu 1} = -\frac{\rho X}{Am_0} \int_{\varepsilon_*}^{\infty} (\varepsilon - \varepsilon_*)\, \omega_1(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Contribution des réactions de radioactivités β— au bilan d'énergie.

Chaque émission β libère l'énergie ε_*. Elle se partage entre l'électron et le neutrino. Le milieu gagne donc ε, énergie de l'électron émis.

Le nombre de réactions de radioactivité par cm³ produisent des électrons d'énergie comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$ est

$$\frac{1 - X}{Am_0} \rho\omega_2(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

L'énergie produite par cm³, par unité de temps, par toutes les captures est

$$\frac{(1 - X)\,\rho}{Am_0} \int_0^{\varepsilon_*} \varepsilon\omega_2(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

Pour simplifier l'écriture nous utiliserons la forme

$$\frac{1 - X}{Am_0} \rho E_2$$

avec

$$(21) \qquad E_2 = \int_0^{\varepsilon_*} \varepsilon\omega_2(\varepsilon)\, d\varepsilon$$

et le neutrino emporte une partie de cette énergie donnée par

$$(22) \qquad \varepsilon_{\nu 2} = \frac{(1 - X)\,\rho}{Am_0} \int_0^{\varepsilon_*} (\varepsilon_* - \varepsilon)\, \omega_2(\varepsilon)\, d\varepsilon.$$

L'énergie produite par les réactions de radioactivité est donc :

$$(23) \qquad \varepsilon_R = (-XE_1 + (1 - X)\, E_2)\, \frac{1}{Am_0}.$$

par gramme matière

Tous les neutrinos ou antineutrinos émis par les deux types de réactions emportent l'énergie ε_R

$$(24) \qquad \varepsilon_{R\nu} = \varepsilon_{\nu 1} + \varepsilon_{\nu 2},$$

qui est entièrement libérée par l'étoile car celle-ci est totalement transparente aux neutrinos qui la traversent sans absorption sensible — comme il sera montré ultérieurement.

Transfert de l'énergie à travers l'étoile

Le transfert d'énergie est assuré par les flux photoniques et neutriniques.

Le flux de protons est donné par la relation habituelle

$$F = -\frac{4acT^3}{3x\rho}\frac{dT}{dr}. \tag{25}$$

En ce qui concerne les neutrinos, nous allons montrer que l'étoile leur est entièrement transparente.

Dans la matière stellaire, l'absorption des neutrinos ne peut se faire que par des réactions de radioactivité du même type ou bien par diffusion électronique.

La section de choc d'un neutrino d'énergie e_ν pour la réaction $(A, Z') + \nu \rightarrow (A, Z' - 1) + e$ est de la forme (Wu et Mockowsky (1966), Bahcall (1964)) :

$$\sigma_\nu = \frac{1}{\pi h^4 c^3} G^2|M|^2 \frac{e_\nu(e_\nu^2 - m^2)^{1/2}}{\frac{1}{\Lambda} e^{\frac{e_\nu + \Delta}{kT}} + 1} \frac{2\pi\zeta}{1 - e^{-2\pi\zeta}} \tag{26}$$

où le dernier terme représente l'influence de l'interaction coulombienne.

Dans le milieu stellaire étudié ici on a un mélange d'ions (A, Z) et d'ions (A, Z — 1).

On peut donc prévoir les réactions suivantes d'absorption des neutrinos et les réactions équivalentes pour les anti-neutrinos.

$$(A, Z) + \nu \rightarrow (A, Z + 1) + e^-$$
$$(A, Z - 1) + \nu \rightarrow (A, Z) + e^-.$$

Si l'on admet que les différences des énergies de liaison entre (A, Z — 1) et (A, Z) et entre (A, Z) et (A, Z + 1) sont du même ordre, on voit que les électrons émis dans ces processus ont une énergie supérieure à l'énergie du maximum de la distribution électronique et la réaction est permise.

Dans l'estimation de la section de choc des neutrinos, le facteur d'occupation toujours voisin de 1 est pris égal à 1. On peut alors écrire :

$$G^2|M|^2 = \frac{1}{\tau f}\frac{2\pi^3 \hbar^7 c^4}{m}. \tag{27}$$

Lorsque e_ν est exprimé en unités de mc^2, τf est la durée de vie de la décroissance β correspondante. Donc :

$$\sigma = \frac{1}{\tau f}\frac{2\pi^2 \hbar^3 c}{m}\frac{2\pi\zeta}{1 - e^{-2\pi\zeta}} e_\nu(e_\nu^2 - 1)^{1/2}. \tag{28}$$

On peut négliger le facteur coulombien très voisin de 1 — les énergies des seuils de capture sont toujours grandes devant 1 donc

$$(e_\nu^2 - 1)^{1/2} \simeq e_\nu.$$

Pour un calcul très approché, on prendra :

$$\cong \sigma_0 e_\nu^2 \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = \frac{2\pi^2}{\tau f}\frac{\hbar^3 c}{m}. \tag{29}$$

Pour une transition permise $\tau f \simeq 10^5$ (Wu, Mockowsky (1966), donc

$$\sigma_0 = 1.2\ 10^{-45} \tag{30}$$

et

$$\sigma \cong 1.2\ 10^{-45}\ e_\nu^2. \tag{31}$$

Les neutrinos risquant d'être absorbés par ces mécanismes ont été émis au cours d'une radioactivité ou d'une capture ; on a donc $\bar{e} < 2\ e_*$ et on peut prendre pour une estimation supérieure de $e_\nu\ e_\nu \simeq 20$ donc

$$\sigma \leqslant 0.5\ 10^{-45}. \tag{32}$$

Le libre parcours moyen d'un neutrino pour ce processus est alors $\lambda = (n\sigma)^{-1}$, n étant le nombre d'atomes par cm^3 capable d'absorber ce neutrino. Le nombre total d'atomes par cm^3 est de l'ordre de $6\ 10^{23}\ \rho/A$; c'est une valeur très supérieure du nombre d'atomes susceptibles d'absorber un neutrino ; nous l'utiliserons cependant pour estimer n. Pour $\rho = 10^9$ g cm^{-3} qui correspond aux conditions extrêmes au centre, on trouve pour le libre parcours une limite inférieure de 400 R_* où R_* est le rayon de l'étoile ; le libre parcours réel est certainement beaucoup plus grand.

La section de choc d'un neutrino pour la diffusion électronique est estimée par Bahcall (1964) à

$$\sigma_e = 1.7\ 10^{-44}\ e^2 \tag{33}$$

soit, en estimant $\bar{e}$ comme précédemment à 20

$$\sigma_e \simeq 8\ 10^{-42}. \tag{34}$$

Le libre parcours moyen est alors $\lambda_e = (n_e\ \sigma_e)^{-1}$ soit $\lambda_e \gg 5\ R_*$.

Le processus d'absorption le plus efficace est de loin la diffusion par les électrons ; il n'est cependant pas suffisant pour contenir les neutrinos dans l'étoile. L'énergie du neutrino ou antineutrino produite dans les réactions I et II est donc perdue par la matière stellaire.

II. Amortissement des oscillations radiales. Discussion de la stabilité vibrationnelle.

A. *Introduction. Equations de base.*

Considérons une étoile dans laquelle à l'équilibre les variables d'état, pression p, masse volumique ρ, température T, sont fonction de la distance r au centre. En mettant en évidence dans le déplacement relatif la partie dépendant du temps

$$\frac{\delta r}{r} = \xi\, e^{i\sigma t} \tag{35}$$

on peut écrire d'après Rosseland (1949), Ledoux et Walraven (1958) l'équation du mouvement sous la forme :

$$\frac{d}{dr}\left(r^4 \Gamma_1 p \frac{d\xi}{dr}\right) + A\xi = \frac{ir^3}{\sigma}\frac{\partial}{\partial r}\left[(\Gamma_3 - 1)\rho\left(\delta\varepsilon - \frac{1}{\rho}\delta \operatorname{div} F\right)\right] \tag{36}$$

dans laquelle l'effet dynamique de la turbulence a été négligé.

L'opérateur A est défini par :

$$A = r^3 \frac{d}{dr}(3\Gamma - 4) P + \sigma^2 \rho r^4. \tag{37}$$

ε représente la production d'énergie thermique ; elle contient l'énergie nucléaire et éventuellement des termes de production d'énergie thermique par viscosité (et par dissipation de la turbulence).

δ div F est la perturbation de la divergence du flux ; dans ces deux termes les effets de la viscosité et la turbulence sont négligés.

Le deuxième membre de l'équation (36) exprime la perte ou le gain d'énergie au cours du mouvement, ce qui entraîne l'amortissement ou l'amplification de l'oscillation.

Pour l'étoile considérée dans son ensemble on peut calculer un coefficient d'amortissement ou d'amplification en utilisant l'équation (36) multipliée par la vitesse v, intégrée sur l'étoile et sur une période d'oscillation.

On écrit ξ sous la forme

$$\xi = \xi_0 \cos \sigma' t\, e^{-\sigma'' t} \tag{38}$$

où ξ_0 ne dépend pas de t et $\dfrac{2\pi}{\sigma}$ la période des oscillations adiabatiques est solution de

$$\int^T dt \int_0^M \left(\rho r^4 \frac{d^2\xi}{dr^2} + A\xi\right) v\, dm = 0 \tag{39}$$

le calcul de la fonction ξ a été fait dans le cas des naines blanches à température nulle par Sauvenier Goffin (1949) ; ξ est à peu près constant dans toute l'étoile, le coefficient d'amortissement ou d'amplification est donné par Ledoux et Walraven (1958) :

$$\sigma'' = -\frac{\Delta K_p}{2\pi\sigma' K_M}. \tag{40}$$

ΔK_p est la variation d'énergie cinétique de l'étoile au cours d'une période

$$\Delta K_p = \frac{\pi}{\sigma'}\int^M \frac{\delta T}{T}\delta\left(\varepsilon - \frac{1}{\rho}\operatorname{div} F\right) dm \tag{41}$$

et

$$K_M = \int_0^M (\delta r)^2\, dm. \tag{42}$$

Lorsque ΔK_p est négatif, l'étoile perd de l'énergie au cours de l'oscillation qui est amortie $\sigma'' > 0$; tandis que lorsque l'étoile gagne de l'énergie cinétique au cours d'une oscillation celle-ci s'amplifie au cours du temps ($\sigma'' < 0$). La stabilité vibrationnelle est donc définie par le signe de ΔK_p dans lequel interviennent deux phénomènes très distincts : la production d'énergie ε et le transfert d'énergie thermique.

Ces deux facteurs sont étudiés successivement pour les naines blanches composées d'un noyau fortement dégénéré contenant presque toute la masse de l'étoile, et d'une enveloppe radiative.

Baglin (1967) a montré que la période des oscillations adiabatiques était quelque peu affectée par les corrections de relativité générale (particulièrement dans les modèles les plus denses).

Cependant σ'' étant ici un terme correctif, il peut être calculé dans le cadre newtonien. Seule la valeur de σ' dans l'équation (39) est donnée par le modèle relativiste.

Le coefficient d'amortissement, donné par la formule (32) fait intervenir deux termes très différents, l'un est la variation lagrangienne au passage de la perturbation de la production d'énergie, l'autre la variation de la divergence du flux correspondant au transfert de l'énergie à travers l'étoile.

Nous allons les étudier successivement.

On peut remarquer que ces deux processus agissent dans des zones différentes de l'étoile. En effet, les termes de production d'énergie sont localisés dans la partie centrale fortement dégénérée, alors que div F n'est différent de zéro que dans les couches extérieures où existe un gradient de température.

Pour comparer l'efficacité des différents processus

il est commode d'associer à chacun un coefficient d'amortissement par la relation :

$$(43) \qquad \sigma''_{\mathrm{A}} = -\frac{1}{2\sigma'^2} \frac{\int_0^{\mathrm{M}} 4\pi r^2 \rho \frac{\delta \mathrm{T}}{\mathrm{T}} \delta \mathrm{A}\, dr}{\int^{\mathrm{M}} 4\pi r^2 \rho (\delta r)^2\, dr}$$

où δA est la variation lagrangienne de la production d'énergie ou de la divergence du flux correspondant au mécanisme A étudié.

B. *Variation de la production d'énergie au passage d'une perturbation.*

Comme nous l'avons vu au paragraphe I les deux mécanismes principaux de production d'énergie dans les objets que nous étudions sont les réactions de radioactivité $\beta-$ directes et inverses et la perte d'énergie due à l'émission de neutrinos par déexcitation des oscillations de plasma.

On peut donc écrire $\delta\varepsilon = \delta\varepsilon_{\mathrm{R}} + \delta\varepsilon_{p_\nu}$ en séparant ces deux processus.

Le calcul de $\delta\varepsilon$ nécessite la connaissance des variations lagrangiennes des variables thermodynamiques en fonction de la perturbation ξ ; ces différentes quantités sont calculées dans l'appendice A.

La variation de ε_{p_ν} peut être déterminée à partir de la formule (12) en fonction des variations des 2 paramètres x et T.

(44)

$$\frac{\delta\varepsilon_{p\nu}}{\varepsilon_{p\nu}} = 4.5 \frac{\delta x}{x} + 1.5 \frac{\delta \mathrm{T}}{\mathrm{T}} - 0.33 \frac{x}{\mathrm{T}_9} \left(\frac{\delta x}{x} - \frac{\delta \mathrm{T}}{\mathrm{T}} \right).$$

D'après, (A, 1) et (A, 9) on en déduit

$$(45) \qquad \frac{\delta\varepsilon_{p\nu}}{\varepsilon_{p\nu}} = 6 \frac{\delta x}{x} = 2 \frac{\delta \rho}{\rho} = -6\xi.$$

Ainsi, la variation lagrangienne du taux de production d'énergie par photo-neutrinos s'exprime en fonction des paramètres x et $\mathrm{T}_9 = 10^{-9}$ T par

$$(46) \qquad \delta\varepsilon_{p\nu} = 10^{6.097}\, x^{4.5}\, \mathrm{T}_9^{1.5} \exp\left(-0.33 \frac{x}{\mathrm{T}_9} \right) \xi.$$

La courbe donnant $\frac{1}{\xi} \delta\varepsilon_{p_\nu}$ est donnée en tirets sur la figure 2.

La variation lagrangienne de l'énergie ε_{R} utilisée par les captures et les radioactivités est reliée aux variations δX, $\delta\mathrm{E}_1$ et $\delta\mathrm{E}_2$ par

$$(47) \qquad \delta\varepsilon_{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mathrm{A}m_0} [-(\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2)\, \delta\mathrm{X} - \mathrm{X}\, \delta\mathrm{E}_1 + (1 - \mathrm{X})\, \delta\mathrm{E}_2]$$

Contrairement à ce qui se produisait pour ε_{p_ν} il est impossible de calculer $\delta\varepsilon_{\mathrm{R}}$ directement à l'aide des perturbations de ρ et T. La perturbation du milieu produit des réactions qui modifient les concentrations ioniques, donc les taux de réactions. Il est donc nécessaire de calculer d'abord la variation des concentrations et des taux de production d'énergie E_1 et E_2. C'est pourquoi il nous faut d'abord procéder au calcul des probabilités différentielles de réaction.

Considérons tout d'abord la réaction de capture électronique. La probabilité de capture par ion (A, Z) d'un électron d'énergie comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$ est donnée par Wu et Mozskowski (1966) :

$$(48) \qquad \omega_1(\varepsilon)\, d\varepsilon = 2\pi h^{-1} |\mathrm{M}|^2 \frac{d\mathrm{N}_\nu}{d\mathrm{E}_0} \mathrm{N}_e\, d\varepsilon$$

La signification des différents termes de l'expression (24) est la suivante :

ε comprend l'énergie au repos et est exprimé en unités de mc^2.

● L'énergie du neutrino émis est donnée par

$$(49) \qquad e^\nu = e - e_*.$$

L'énergie cinétique de l'électron capturé est reliée à ε par

$$(50) \qquad e = \varepsilon - 1.$$

● $|\mathrm{M}|$ est le module de la matrice d'interaction.

● N_e est le nombre d'électrons présents dans l'intervalle ε, $\varepsilon + d\varepsilon$.

$$(51) \qquad \mathrm{N}_e\, d\varepsilon = \frac{1}{h^3} \frac{8\pi p^2\, dp}{\frac{1}{\Lambda} e^{\mathrm{E}/kT} + 1}$$

avec

$$p = (\varepsilon^2 - 1)^{1/2}\, mc.$$

● $d\mathrm{N}_\nu/d\mathrm{E}_0$ est la densité d'états finaux possible pour le système par intervalle d'énergie totale.

$$(52) \qquad \mathrm{N}(\nu) = \frac{4\pi p_\nu^2\, dp_\nu}{h^3}$$

soit

$$(53) \qquad \frac{d\mathrm{N}_\nu}{d\mathrm{E}_0} = \frac{d\mathrm{N}_\nu}{d\varepsilon_\nu} = \frac{4\pi p_\nu^2}{h^3 c}$$

$e_\nu = p_\nu c$ puisque l'on suppose que la masse au repos du neutrino est nulle ; la densité d'états finaux est donc

$$(54) \qquad \frac{d\mathrm{N}_\nu}{d\mathrm{E}_0} = \frac{4\pi}{h^3 c} (e - e_*)^2$$

et en posant $\varepsilon_* = e_* + 1$, on peut aussi l'écrire

$$(55) \qquad \frac{d\mathrm{N}_\nu}{d\mathrm{E}_0} = \frac{4\pi}{h^3 c} (\varepsilon - \varepsilon^*)^2$$

la probabilité différentielle de capture prend la forme

$$(56)\quad \omega_1(\varepsilon)\,d\varepsilon = \mathrm{K}\,\frac{\varepsilon(\varepsilon^2-1)^{1/2}\,(\varepsilon-\varepsilon_*)^2\,d\varepsilon}{1+\dfrac{1}{\Lambda}\,e^{E/kT}}$$

où K est une constante purement nucléaire définie par (14)

$$\mathrm{K} = \frac{mc^2}{k}\,\frac{\mathrm{G}^2}{2\pi^3}\,|\mathrm{M}|^2$$

qui ne dépend que de la transition. Les valeurs de K pour les transitions intéressant les modèles étudiés sont discutées au paragraphe I.

Pour les réactions de radioactivité on peut comme précédemment exprimer la probabilité d'émission d'un électron d'énergie comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$, sous la forme

$$(57)\qquad \omega_2(\varepsilon)\,d\varepsilon = 2\pi h^{-1}|\mathrm{M}|^2\,\mathrm{N}'_e\,\mathrm{N}_{\tilde{\nu}}\,d\varepsilon$$

N'_e est le nombre d'états possibles pour l'électron d'énergie comprise entre ε et $\varepsilon + d\varepsilon$ et $\mathrm{N}_{\tilde{\nu}}$ le nombre d'états possibles pour l'antineutrino correspondant d'énergie

$$e_{\tilde{\nu}} = e_* - e = \varepsilon_* - \varepsilon$$

N'_e représente donc le nombre d'états libre d'énergie ε c'est-à-dire l'écart à la distribution de Fermi.

$$(58)\qquad \mathrm{N}'_e = 8\pi p^2\,dp\left(1 - \frac{1}{1+\dfrac{1}{\Lambda}\,e^{E/kT}}\right)$$

et comme précédemment, la densité d'états finaux est de la forme

$$(59)\qquad \frac{d\mathrm{N}(\tilde{\nu})}{d\mathrm{E}_0} = \frac{4\pi}{h^2\,c}\,(\varepsilon_* - \varepsilon)^2$$

ce qui donne à la probabilité de réaction une forme analogue à celle qui a été obtenue pour les captures soit

$$(60)\qquad \omega_2(\varepsilon)\,d\varepsilon = \mathrm{K}\varepsilon^2(\varepsilon^2-1)^{1/2}\,(\varepsilon-\varepsilon_*)^2\,d\varepsilon\,\frac{\Lambda^{-1}\,e^{E/kT}}{1+\Lambda^{-1}\,e^{E/kT}}.$$

Le nombre total de réactions dépend des concentrations des ions qui participent à ces réactions. Il est donc nécessaire de connaître la variation de celles-ci au cours du temps.

Lorsque les réactions I et II se produisent simultanément avec les probabilités W_1 et W_2, la variation lagrangienne de la concentration en ions (A, Z) est donnée par

$$(61)\qquad \frac{d\mathrm{X}}{dt} = -\,\mathrm{W}_1\,\mathrm{X} + \mathrm{W}_2(1-\mathrm{X}).$$

Il en découle bien sûr une variation opposée de la concentration en ions (A, Z — 1)

$$\frac{d}{dt}\,(1-\mathrm{X}) = -\,\frac{d\mathrm{X}}{dt}$$

et une variation de la densité électronique :

$$(62)\qquad \frac{\rho}{\mathrm{A}m_0}\,\frac{d\mathrm{X}}{dt} = \frac{dn_e}{dt}.$$

L'équilibre (A, Z) $+ e \rightleftarrows$ (A, Z — 1) est caractérisé par

$$(63)\qquad \frac{d\mathrm{X}}{dt} = 0$$

ce qui permet de calculer la concentration à l'équilibre par la relation

$$(64)\qquad \mathrm{W}_1\,\mathrm{X} = \mathrm{W}_2(1-\mathrm{X})$$

ou encore

$$(65)\qquad \mathrm{X} = \frac{\mathrm{W}_2}{\mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2}.$$

Lorsqu'une perturbation se produit dans le gaz, la variation de densité qui en découle, entraîne une modification du taux de réaction donc une variation des concentrations ioniques.

Dans l'hypothèse des perturbations faibles, que nous avons faite dans tout ce travail on peut utiliser une équation linéarisée pour déterminer la variation lagrangienne $\delta\mathrm{X}$ de X. Cette équation est obtenue à l'aide de l'équation (61) soit

$$(66)\quad \frac{d\,\delta\mathrm{X}}{dt} = -\,\mathrm{W}_1\,\mathrm{X}\left(\frac{\delta\mathrm{W}_1}{\mathrm{W}_1} + \frac{\delta\mathrm{X}}{\mathrm{X}}\right) + \mathrm{W}_2(1-\mathrm{X})\left(\frac{\delta\mathrm{W}_2}{\mathrm{W}_2} + \frac{\delta(1-\mathrm{X})}{1-\mathrm{X}}\right)$$

W_1 et W_2 étant fonction des variables d'état sont modifiées au cours de la perturbation. Leurs variations au premier ordre $\delta\mathrm{W}_1$ et $\delta\mathrm{W}_2$ sont obtenues par la relation.

$$(67)\qquad \delta\mathrm{W}_1 = \mathrm{W}_1\left(\frac{\partial\mathrm{W}_1}{\partial\rho}\,\delta\rho + \frac{\partial\mathrm{W}_1}{\partial\mathrm{T}}\,\delta\mathrm{T}\right)$$

et une relation analogue pour W_2.

On peut supposer qu'au cours du passage de la perturbation le gaz reste adiabatique. En effet, le temps de transfert de chaleur est de l'ordre de $(\lambda/c_v)\,\mathrm{R}^2$ (Baglin, 1967). La vitesse de propagation de la chaleur $v \simeq \dfrac{\mathrm{R}}{\tau} \simeq 10^{-5}$ cm s^{-1} est très faible par rapport à la vitesse du son (10^8 cm s^{-1}).

Même pour des distances faibles, ce temps reste

long comparé aux périodes d'oscillation adiabatique de l'étoile (Baglin, 1966) qui sont de l'ordre de quelques secondes.

La perturbation est donc adiabatique car aucun échange de chaleur n'a le temps de se faire

$$(68) \qquad \frac{\delta T}{\delta \rho} = \left(\frac{dT}{d\rho}\right)_{\text{adiabatique}}.$$

On peut alors écrire δW_1 sous la forme simple

(69)

$$\delta W_1 = \left[\rho \frac{\partial W_1}{\partial \rho} + T \frac{\partial W_1}{\partial T}\left(\frac{d \log T}{d \log \rho}\right)_{ad}\right] \frac{\delta \rho}{\rho} = V_{*1} \frac{\delta \rho}{\rho}$$

et de façon tout à fait analogue

(70)

$$\delta W_2 = \left[\rho \frac{\partial W_2}{\partial \rho} + T \frac{\partial W_2}{\partial T}\left(\frac{d \log T}{d \log \rho}\right)_{ad}\right] \frac{\delta \rho}{\rho} = V_2^* \frac{\delta \rho}{\rho}.$$

En reportant les expressions (69) et (70) dans l'équation (51) on obtient une relation entre δX et $\delta \rho$

$$(71) \quad \frac{d\,\delta X}{dt} = -(W_1 + W_2)\,\delta X - [X(V_1^* + V_2^*) - V_2^*] \frac{\delta \rho}{\rho}$$

On recherche la perturbation des concentrations δX solution de (71) sous la forme $b\, e^{i\sigma' t}$; b peut être calculé comme solution de l'équation

$$(72) i\sigma' b = -(W_1 + W_2)\, b - 3[X(V_1^* + V_2^*) - V_2^*]\xi$$

soit en n'utilisant que des grandeurs à l'équilibre qui sont calculées dans l'appendice B en fonction de x et T

$$(73) \qquad b = 3 \frac{X(V_1^* + V_2^*) - V_2^*}{(W_1 + W_2) + i\sigma'} \xi = 3 \frac{W_2 V_1^* - W_1 V_2^*}{(W_1 + W_2)^2 \left(1 + \frac{i\sigma'}{W_1 + W_2}\right)}$$

la solution est complexe ; ceci montre, comme nous l'avions dit, qu'il existe une différence de phase entre la perturbation de densité et la perturbation de concentration. La phase φ de δX par rapport à $\delta \rho$ est obtenue à partir de l'expression de b soit

$$(74) \qquad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{\sigma'}{W_1 + W_2}.$$

Le calcul de $\delta \varepsilon_R$ nécessite aussi la connaissance des variations de E_1 et E_2, taux de production d'énergie par chaque type de réaction. Le même raisonnement que celui que nous venons de faire pour W_1 et W_2 s'applique à E_1 et E_2. On met $\delta \varepsilon_1$ sous la forme facilement utilisable

$$(75) \quad \delta E_1 = \left(x \frac{\partial E_1}{\partial x} + T \frac{\partial E_1}{\partial T} t\right) \frac{\delta x}{x} = e_1 \frac{\delta x}{x}$$

et on utilise le même formalisme pour δE_2 soit

$$(76) \quad \delta E_2 = \left(x \frac{\partial E_2}{\partial x} + T \frac{\partial E_2}{\partial T} t\right) \frac{\delta x}{x} = e_2 \frac{\delta x}{x}$$

Il est maintenant possible de relier le taux de perte d'énergie au passage de la perturbation à la variation de densité uniquement en utilisant les expressions obtenues ci-dessus pour δX, δE_1 et δE_2 ; soit

(77)

$$\delta \varepsilon_R = [-(E_1 + E_2)\, b - X e_1 + (1 - X)\, e_2] \frac{\delta x}{x}$$

qui prend la forme simple

$$(78) \qquad \delta \varepsilon_R = \alpha \frac{\delta x}{x}$$

en utilisant la notation

$$(79) \quad \alpha = -(E_1 + E_2)\, b - X e_1 + (1 - X)\, e_2.$$

En introduisant la valeur de X à l'équilibre et la valeur de b donnée par (73) on obtient la valeur de α en fonction des taux de production d'énergie qui sont calculés en fonction des trois paramètres x, x_* et T, c'est-à-dire

$$(80) \quad \alpha = \frac{1}{A m_0} \frac{W_2 V_1^* - W_1 V_2^*}{1 + \frac{i\sigma'}{W_1 + W_2}} \left[\frac{E_1 + E_2}{(W_1 + W_2)^2} + \frac{W_1 e_2 - W_2 e_1}{W_1 + W_2}\right]$$

α, comme δX est complexe, ce qui exprime le fait que la production d'énergie est déphasée par rapport à la perturbation de densité. L'angle de phase φ' est donné par

$$(81) \quad \operatorname{tg} \varphi' = -\frac{\sigma'}{W_1 + W_2} \left(1 + \frac{W_2 V_1^* - W_1 V_2^*}{W_1 e_2 - W_2 e_1} \frac{W_1 + W_2}{E_1 + E_2}\right)$$

Il est cependant toujours très faible.

Les expressions analytiques de W_1, W_2, E_1, E_2, etc... sont difficilement utilisables ; c'est pourquoi il a paru préférable d'obtenir des expressions analytiques approchées. L'appendice B traite des approximations utilisées qui permettent de donner

TABLEAU III

	$x_* > x$	$x_* < x$
W_1	$2K(kT)^3 \frac{x_*^3}{x+x_*} e^{\frac{x-x_*}{kT}}$	$-Ka + KkT\,x^2(x+x_*)^2$
W_2	$Ka - KkT\,x^2(x+x_*)^2$	$2K(kT)^3 \frac{x_*^2 x}{x+x_*} e^{\frac{x_*-x}{kT}}$
E_1	$2K(kT)^3 \frac{x_*^3 x}{x+x_*} e^{\frac{x-x_*}{kT}}$	$-Kc - KkT\,x^3(x+x_*)^2$
E_2	$Kc + KkT\,x^3(x+x_*)^2$	$2K \frac{x_*^2 x^2}{x+x_*} (kT)^3 e^{\frac{x_*-x}{kT}}$
V_1	$2K(kT)^2 \frac{x_*^4}{x+x_*} e^{\frac{x-x_*}{kT}}$	$-Kxa' + KkT\,x^2(x+x_*)(5x+3x_*)$
V_2	$Kxa' - KkT\,x^2(x+x_*)(5x+3x_*)$	$-2K \frac{x_*^3 x}{x+x_*} (kT)^2 e^{\frac{x_*-x}{kT}}$
e_1	$2K(kT)^4 \frac{x_*^4 x}{x+x_*} e^{\frac{x-x_*}{kT}}$	$-2K\,x^3(x+x_*)(6x+4x_*)$
e_2	$Kxc' + KkT\,x^3(x+x_*)(6x+4x_*)$	$2K \frac{x_*^3 x^2}{x_*+x} (kT)^2 e^{\frac{x_*-x}{kT}}$
X	$2 \frac{x_* x}{a(x+x_*)} (kT)^3 e^{\frac{x-x}{kT}} \left(1 - \frac{kTx^2(x+x_*)^2}{a}\right)$	$1 - 2(kT)^3 \frac{x_*^3}{a(x+x_*)} e^{\frac{x_*-x}{kT}}$
$W_2 V_1 - W_1 V_2$	$2K^2(kT)^2 \frac{x_*^4}{x+x_*} ae^{\frac{x-x_*}{kT}}$	$-2K^2(kT)^2 \frac{x_*^3 x}{x_*+x} ae^{\frac{x_*-x}{kT}}$
$W_1 + W_2$	$Ka - KkT\,x^2(x+x_*)^2$	$-Ka + KkT\,x^2(x+x_*)^2$
$E_1 + E_2$	Kc	$-Kc$
$W_1 e_2 - W_2 e_1$	$-2K^2(kT^2) \frac{x_*^4 x}{x+x^*} ae^{\frac{x-x_*}{kT}}$	$-2K^2(kT)^2 \frac{x_*^3 x^2}{x_*+x} ae^{\frac{x_*-x}{kT}}$

une forme algébrique simple aux expressions à calculer telles que W_1, E_1, etc....

Le tableau (III) donne les valeurs de ces expressions dans les deux intervalles $x > x_*$ et $x < x_*$. Il doit être complété par certaines valeurs au point $x = x_*$. En effet l'approximation du degré d'occupation a été faite à l'aide de deux fonctions différentes dans les deux intervalles situés de part et d'autre du seuil x_*, ce qui a introduit une discontinuité, pour la valeur du seuil de capture, de la plupart des expressions calculées. Cette discontinuité n'a naturellement aucune réalité physique. Elle est cependant acceptable pour un calcul numérique ; en effet elle reste en accord avec les approximations faites et pour le calcul de α elle ne donne lieu à aucune difficulté puisque seules les valeurs en une suite discrète de points sont nécessaires dans le cadre de la technique de calcul utilisée.

On doit remarquer que ces calculs ne sont valables que pour $T \neq 0$, où la distribution des électrons est différente de la distribution idéale de Fermi. En effet, lorsque la température est nulle l'équation d'évolution de la perturbation des concentrations n'est plus linéaire en $\delta\rho/\rho$. Dans le cas où la distribution des électrons est exactement représentée par une sphère de Fermi, la concentration ionique

TABLEAU IV

CAS DU MILIEU COMPLÈTEMENT DÉGÉNÉRÉ INDÉPENDANT DE T

	$x_* > x$	$x_* < x$
W_1	0	$-Ka$
W_2	Ka	0
E_1	0	$-Kc$
E_2	Kc	0
V_1	0	$Kx^3(x-x_*)^2$
V_2	$-Kx^3(x-x_*)^2$	0
e_1	0	$Kx^4(x-x_*)^2$
e_2	$-Kx^4(x-x_*)^2$	0
X	0	1

présente un saut brusque pour la densité du seuil soit

$$X = 1 \text{ dans la région } x > x_*,$$
$$X = 0 \text{ dans la région } x < x_*.$$

Il n'y a aucune réaction possible $W_1 + W_2 = 0$.

On remarque alors que l'expression de δX est au moins du second ordre par rapport à toute perturbation. De même δE n'est pas linéaire en $\delta\rho/\rho$ et il est impossible d'appliquer une théorie linéarisée pour déterminer σ''. Ceci provient du fait que les réactions n'interviennent que dans la région dont la densité est voisine de celle du seuil de capture ; dans ce domaine la période de radioactivité et la durée de vie des noyaux pour la capture électronique sont infinies.

Le tableau IV donne les valeurs des mêmes expressions que celles qui figurent dans le tableau III dans l'hypothèse du gaz complètement dégénéré dont l'équation d'état est totalement indépendante de la température.

Dans ce travail on ne s'intéresse qu'au cas des températures assez élevées où la théorie linéaire des oscillations s'applique sans difficultés.

En reportant dans les équations (72) et (73) donnant les expressions de α et tg φ' les valeurs des différentes grandeurs qui interviennent, en fonction de x et T, on obtient deux expressions différentes selon que la densité est inférieure ou supérieure à celle du seuil, Soit pour $x_* > x$

$$(82)\quad \alpha = 2K\frac{(kT)^2}{Am_0}\frac{x_*^4}{x+x_*}\,e^{\frac{x-x_*}{kT}}\left[\frac{c}{a+\frac{i\sigma'}{K}}-x\right]$$

et dans de domaine des grandes densités $x_* < x$

$$(83)\quad \alpha = 2K\frac{(kT)^2}{Am_0}\frac{x^{*3}x}{x+x_*}\,e^{\frac{x_*-x}{kT}}\left[\frac{c}{a-\frac{i\sigma'}{K}}-x\right].$$

La phase φ' est donnée par

$$(84)\qquad \operatorname{tg}\varphi' = -\frac{\sigma'}{K|a|} \text{ pour } x \neq x_*.$$

Au voisinage du seuil on doit utiliser l'expression

$$|\operatorname{tg}\varphi'| = \frac{\sigma'}{K\,kT\,x^2(x+x_*)^2}.$$

On remarque que φ' présente un maximum pour $x = x_*$ et décroît très rapidement de part et d'autre de cette valeur. $\mathcal{R}(\alpha)$, la partie réelle de α est calculée à partir de la valeur de α tirée des équations (82) et (83) pour les deux domaines. Pour $x_* > x$

$$(85)\quad \mathcal{R}(\alpha) = \frac{2K}{Am_0}\,mc^2(kT)^2\frac{x_*^4}{x+x_*}\,e^{\frac{x-x_*}{kT}}\left[\frac{c}{a}\frac{1}{1+\left(\frac{\sigma'}{Ka}\right)^2}-x\right]$$

et pour $x_* < x$

$$(86)\quad \mathcal{R}(\alpha) = \frac{2K}{Am_0}\,mc^2(kT)^2\frac{x_*^3x}{x+x_*}\,e^{\frac{x-x_*}{kT}}\left[\frac{c}{a}\frac{1}{1+\left(\frac{\sigma'}{Ka}\right)^2}-x\right].$$

Dans les formules (70) et (71) l'énergie est exprimée en ergs alors que précédemment elle était exprimée en unités de mc^2. kT est exprimé en unités de mc^2 soit

$$kT = 0.169\ 10^{-9}\ T \quad (T \text{ en } {}^oK).$$

Sur la figure 2 une courbe donnant $\mathcal{R}(\alpha)$ en fonction de ρ est représentée en traits pointillés pour $T_9 = 1$ et $T_9 = 0.1$. Cette courbe correspond à la capture électronique sur le sodium 23, dont la transition a été étudiée précédemment. Elle présente un maximum accentué au voisinage du seuil x_* (ici $x_* = 8.5$) et décroît très vite avec T à cause du terme exponentiel.

C. *Amortissement des oscillations dû au noyau dégénéré.*

Aux deux mécanismes étudiés nous faisons correspondre par la relation (43) des coefficients d'amortissement $\sigma''_{p\nu}$ et σ''_R.

TABLEAU V

Coefficient d'amortissement σ''_ν du aux neutrinos de plasma

x_0	Log ρ_c	10^7	$5\ 10^7$	10^8	3.10^8	5.10^8	8.10^8	10^9
5	8.40	— 26.14		— 16.54	— 13.25	— 12.24	— 11.52	— 11.24
6	8.64	— 26.38		— 16.68	— 13.81	— 12.99	— 11.43	— 11
7	8.84	— 26.40	— 19.6	— 17.92	— 13.31	— 12.09	— 11.08	— 10.89

L'étude des courbes de la figure 1 montre que dans un étroit domaine de densité le taux de production d'énergie par les réactions de radioactivité excède le taux de production d'énergie par déexcitation des plasmas.

A l'extérieur de ce domaine, le premier décroît très vite tandis que celui-ci reste assez élevé. On s'attend donc à ce que le coefficient d'amortissement soit essentiellement influencé par les neutrinos provenant des plasmas.

1) Coefficient d'amortissement dû aux oscillations de plasma.

Les équations (40), (41) et (42) déterminent $\sigma''_{p\nu}$ par la relation

$$(87) \qquad \sigma''_{p\nu} = -\frac{1}{\sigma'^2} \frac{\int^M \frac{\delta T}{T} \delta\varepsilon_{p\nu} 4\pi r^2 \rho\, dr}{\int^M 4\pi r^2 \rho (\delta r)^2\, dr}.$$

La perturbation adiabatique dans le milieu dégénéré permet d'écrire la variation de la température sous la forme

$$\frac{\delta T}{T} = \xi \quad (A.9)$$

et

$$\delta\varepsilon_{p\nu} = -6\xi\varepsilon_{p\nu} \quad \text{d'après (45).}$$

Le coefficient d'amortissement est alors donné par

$$(88) \qquad \sigma''_{p\nu} = \frac{6}{\sigma'^2} \frac{\int_0^R \varepsilon_{p\nu} r^2 \rho\, dr}{\int_0^R r^4 \rho\, dr}.$$

Le tableau (V) donne log $\sigma''_{p\nu}$ en fonction de la température et la densité centrale du modèle. En première colonne figure x_0, valeurs du paramètre x au centre de l'étoile.

$\sigma''_{p\nu}$ est négligeable pour $T \leqslant 10^7$ degrés, il augmente très rapidement avec la température et beaucoup plus lentement avec la densité. Aux températures supérieures à 100 millions de degrés, le temps caractéristique de l'amortissement devient très court, de l'ordre de 10^4 années.

2) Coefficient d'amortissement dû aux réactions de radioactivités directes et inverses.

Le calcul de $\delta\varepsilon_R$ fait précédemment a montré que cette quantité avait un déphasage par rapport à l'oscillation. Cependant celui-ci reste très petit. A la partie réelle de $\delta\varepsilon_R$: $R(\alpha)\ \xi$ correspond le terme d'amortissement tandis que la partie imaginaire modifie très légèrement l'amplitude de l'oscillation par rapport à l'amplitude des oscillations adiabatiques.

Comme pour l'autre processus on peut associer une « variation d'énergie cinétique » ΔK_{pR} due à ce processus de perte d'énergie telle que

$$(89) \qquad \Delta K_{pR} = -\frac{\pi}{\sigma'} \int_0^R \xi^2 \mathcal{R}(\alpha)\, 4\pi r^2 \rho\, dr$$

d'après (A, 1) (A, 9) et (62).

On lui associe un coefficient d'amortissement σ''_R par la relation

$$(90) \qquad \sigma''_R = \frac{1}{\sigma'^2} \frac{\int_0^R t\, \mathcal{R}(\alpha)\, r^2 \rho\, dr}{\int_0^A r^4 \rho\, dr}.$$

Comme nous l'avons déjà remarqué σ''_R dépend très fortement de la température. Il est négligeable pour des températures inférieures à 10^8 degrés mais augmente très rapidement avec T.

Le tableau VI donne les valeurs de log σ''_R pour différentes températures et différentes valeurs de la densité centrale du modèle stellaire considéré.

Pour chaque valeur de la température les courbes donnant σ''_R en fonction de ρ_c sont tracées sur la figure 4.

σ''_R ne prend des valeurs importantes que lorsque la température est très élevée : supérieure à 300 millions de degrés.

Pour qu'un grand nombre de réactions de radioactivité β puisse avoir lieu il faut aussi qu'une cer-

TABLEAU VI

COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT σ''_R DÛ AUX RÉACTIONS DE RADIOACTIVITÉ β^- DIRECTES ET INVERSES

x	Log ρ_c	10^7	5.10^7	10^8	3.10^8	5.10^8	8.10^8	10^9
5	8.40	—	—	—	—	— 26.57	— 20.26	— 17.74
6	8.64	—	—	—	— 31.72	— 22.57	— 18.67	— 15.25
7	8.84	—	—	—	— 23.43	— 16.66	— 14.08	— 12.85

Le tiret indique que la valeur correspondante est inférieure à 10^{-38}.

taine fraction de l'étoile ait une densité assez voisine du seuil de capture électronique.

Dans le cas du sodium 23 que nous avons choisi d'étudier ici, (voir ci-dessus I), le paramètre x du seuil est 8.5 et le maximum de x au centre pour un modèle stable est à peu près 8, variant un peu avec la température. Les modèles seront donc d'autant plus affectés par ce type d'amortissement qu'ils seront plus près de la stabilité dynamique. On remarque en effet d'après le tableau VI une très forte dépendance de log σ''_R en fonction de la densité centrale.

D. *Variation de la divergence du flux d'énergie.*

Comme il a été montré dans le paragraphe I, la divergence du flux d'énergie transportée par les neutrinos est nulle puisque celui-ci est constant.

Le seul flux d'énergie jouant un rôle ici est le flux radiatif.

A cause de la grande diversité de conditions physiques et en particulier la grande variation du coefficient d'absorption à l'intérieur d'une naine blanche les trois principales régions : complètement dégénérées, partiellement et non dégénérées sont étudiées séparément.

Le flux radiatif F est donné en fonction de ρ et T par la relation :

$$F = -\frac{4acT^3}{3\varkappa\rho}\frac{dT}{dr}. \tag{91}$$

Dans le noyau dégénéré isotherme, à l'équilibre $\frac{dT}{dr} = 0$ donc $F = 0$.

Au passage d'une perturbation on a exactement

$$\delta F = -\frac{4acT^3}{3\varkappa\rho}\frac{d}{dr}\delta T. \tag{92}$$

Or

$$\frac{d}{dr}\delta T = \frac{d}{dr}(-\xi T) \tag{93}$$

d'après (A, 9).

ξ est constant au cours de l'oscillation et T est uniforme dans l'étoile. Donc $\delta F = 0$ et $\delta \operatorname{div} F = 0$.

Le transfert du rayonnement joue donc un rôle négligeable dans ces régions. Il n'en est pas de même dans les régions extérieures.

Le coefficient d'absorption dans la région partiellement dégénérée est essentiellement dû à la diffusion Compton. Il a été calculé en fonction de la température et du degré de dégénérescence η par CHIN (1965). Il est écrit sous la forme

$$x = \frac{\sigma_0}{\mu_0 m_0} G(\eta, T) \tag{94}$$

où σ_0 est la section de choc de diffusion.

Le logarithme de la fonction G peut-être représenté par un polynôme en η et T avec précision de 10^{-4} soit :

$$\begin{aligned}\operatorname{Log}_e G(\eta, T) &= -0.3037 - 6.8978\frac{kT}{mc^2} - 8.8977\left(\frac{kT}{mc^2}\right)^2 \\ &\quad - 0.1587\,\eta + 0.3925\frac{kT}{mc^2}\eta - 0.01468\,\eta^2 \\ &\quad - 0.4519\left(\frac{kT}{mc^2}\right)^2\eta - 0.0524\frac{kT}{mc^2}\eta^2.\end{aligned} \tag{95}$$

On se propose ici de calculer la contribution au coefficient de stabilité vibrationnelle, de la région partiellement dégénérée. Pour cela, il faut déterminer la variation $\delta(4\pi r^2 F)$ par

$$\delta(4\pi r^2 F) = 4\pi r^2 F\left(\frac{2\,\delta r}{r} + \frac{\delta F}{F}\right) \tag{96}$$

et $\delta F/F$ est donné par l'équation

$$(97)\quad \frac{\delta F}{F} = 3\,\frac{\delta T}{T} - \frac{\delta x}{x} - \frac{\delta \rho}{\rho} - \delta\left(\frac{dT}{dr}\right)\Big/\frac{dT}{dr}.$$

En supposant l'oscillation voisine de l'oscillation adiabatique qui est bien représentée par $\xi = C^{te}$. on a

$$(98)\quad \frac{\delta \rho}{\rho} = -3\xi$$

et

$$(99)\quad \frac{\delta T}{T} = (\Gamma_T - 1)\,\frac{\delta \rho}{\rho}.$$

Dans cette région nous supposerons $\Gamma_T = 5/3$ soit

$$(100)\quad \frac{\delta T}{T} = -2\xi.$$

Le dernier terme de δF, variation du gradient de température s'écrit

$$(101)\quad \delta\,\frac{\delta T}{dr} = \frac{d}{dr}\,\delta T = -2\xi\,\frac{dT}{dr}.$$

On relie les variations du coefficient d'absorption à celles du paramètre de dégénérescence par

$$(102)\quad \frac{\delta x}{x} = a\,\frac{\delta T}{T} + b\,\frac{\delta \eta}{\eta}$$

a et b sont facilement calculables grâce à l'équation (86)

$$(103)\quad a = \frac{kT}{mc^2}\left[-6.897 + 17.795\,\frac{kT}{mc^2} - 0.892\,\eta - 0.904\,\frac{kT}{mc^2}\,\eta - 0.0524\,\eta^2\right]$$

$$b = \eta\, b_*$$

$$b_* = \left(-0.189 + 0.392\,\frac{kT}{mc^2} - 0.452\left(\frac{kT}{mc^2}\right)^2 + 0.0294\,\eta\right).$$

La relation entre ρ, et T est celle du gaz partiellement dégénéré non relativiste

$$\rho \propto T^{3/2}\,\sigma(\eta) \text{ avec } \sigma(\eta) = \int_0^\infty \frac{x^{1/2}\,dx}{e^{x-\eta}+1}$$

elle permet de déterminer la variation de densité en fonction de η et T soit

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{3}{2}\,\frac{\delta T}{T} + \frac{\mathcal{F}'(\eta)}{\mathcal{F}(\eta)}\,\delta\eta$$

ou encore

$$\frac{\delta \eta}{\eta} = \frac{1}{\eta}\,\frac{\mathcal{F}'(\eta)}{\mathcal{F}(\eta)}\left(\frac{\delta \rho}{\rho} - \frac{3}{2}\,\frac{\delta T}{T}\right)$$

la variation du coefficient d'absorption s'écrit alors

$$\frac{\delta x}{x} = \left(a - \frac{3}{2}\,\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}'}\,b_*\right)\frac{\delta T}{T} + b_*\,\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}'}\,\frac{\delta \rho}{\rho} = a_1\,\frac{\delta T}{T} + b_1\,\frac{\delta \rho}{\rho} = -(2a_1 + 3b_1)\,\xi$$

avec

$$a_1 = a - \frac{3}{2}\,\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}'}\,b_* \qquad b_1 = b_*\,\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}'}.$$

Finalement on obtient la variation de $4\pi r^2 F$ par

$$\delta(4\pi r^2 F) = 4\pi r^2 F(2a_1 + 3b_1 - 3)\,\xi.$$

La contribution de ces régions au coefficient de stabilité σ''_{pd} peut s'exprimer à l'aide de l'intégrale

$$(104)\quad I_{pd} = \int 2\xi\,\frac{d}{dm}\left[(2a_1 + 3b_1 - 3)\,\xi\,4\pi r^2 F\right] dm$$

en supposant que la luminosité $L = 4\pi r^2 F$ est constante dans ces couches déjà extérieures on a

$$(105)\quad I_{pd} = 2\xi^2 L \int_d \frac{d}{dm}\,(2a_1 + 3b_1 - 3)\,dm = 2\xi L[2a_1 + 3b_1 - 3]_{pd}.$$

La région (pd) est la région partiellement dégénérée, dans laquelle cette approximation de $\varkappa$ est valable soit $\eta = 0$ à $\eta = 3$ en moyenne.

Dans a_1 et b_1 intervient le terme $b_*\,\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}'}$; même pour des plus grandes valeurs de $\frac{kT}{mc^2} \simeq 10$, b_* est inférieur à 50 et $\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}'} \simeq 10^{-4}$ donc $b_*\,\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}'} < 10^{-4}$.

On utilisera l'approximation

$$(106)\quad a_1 = a \qquad b_1 = 0.$$

On peut alors écrire l'équation (105) sous la forme

$$I_{pd} = 2\xi^2 L[2a - 3]_{\eta=0}^{\eta=3} = 4\xi^2 L[a(\eta = 3) - a(\eta = 0)]$$

avec

$$(107)\quad a(\eta = 3) = \frac{kT_3}{mc^2}\left(-9.44 + 15.08\,\frac{kT_3}{mc^2}\right)$$

$$a(\eta = 0) = \frac{kT_0}{mc^2}\left(-6.897 + 17.795\,\frac{kT_0}{mc^2}\right)$$

où T_3 et T_0 sont les températures respectives des régions $\eta = 3$ ou $\eta = 0$ dans le modèle.

En supposant que T varie encore très peu dans cette région à cause de la très faible opacité on prend $T_0 = T_3 = \bar{T}$ et

$$A = a(\eta = 3) - a(\eta = 0)$$

$$= \frac{k\bar{T}}{mc^2}\left[-2.54 - 2.71\,\frac{k\bar{T}}{mc^2}\right]$$

pour

$$\frac{k\bar{T}}{mc^2} \gg 1 \qquad A = -5.42\left(\frac{k\bar{T}}{mc^2}\right)^2$$

mais pour

$$\frac{k\bar{T}}{mc^2} \ll 1$$

qui est le cas généralement rencontré

$$A = -7.9\,\frac{k\bar{T}}{mc^2}$$

et

$$I_{pd} = -7.9\,L\xi^2\,\frac{k\bar{T}}{mc^2} \tag{108}$$

et le coefficient d'amortissement est donné par

$$\sigma''_{Fpd} = 7.9\,L\,\frac{k\bar{T}}{mc^2}\,\frac{1}{2\pi\sigma^2 K_0} \tag{109}$$

où l'on a introduit la rotation :

$$K_0 = K_M\,\xi^{-2}.$$

Dans les couches extérieures radiatives, pour lesquelles l'équation d'état du gaz parfait est bonne, le calcul du terme σ''_F a été fait par Ledoux et Sauvenier Goffin (1950).

Le coefficient d'absorption utilisé est celui donné par Kothari (1932) et le modèle hydrodynamique celui de Marshak (1940). Ils ont obtenu :

$$\sigma''_F \simeq \frac{0.2\,L}{2\pi\sigma^2 K_0}. \tag{110}$$

Le coefficient σ''_F pour l'ensemble de l'étoile est donc

$$\sigma^F_{\sigma} = \left(7.9\,\frac{k\bar{T}}{mc^2} + 0.2\right)\frac{L}{2\pi\sigma^2 K_0}. \tag{111}$$

Dans les régions où $0 < \eta < 3$, T est de l'ordre de T_c ; $\dfrac{kT}{mc^2}$ peut être estimé à 0,1 ce qui montre que les deux régions apportent une contribution d'un même ordre de grandeur. Si on admet une relation très grossière entre la luminosité et la température centrale comme celle donnée par Schatzman (1952), on peut exprimer σ''_F uniquement en fonction de cette température T.

Pour les étoiles froides $T \leqslant 10^8$ degrés on peut utiliser la formule donnée par Schatzman (1952),

$$L = 10^{-21.62}\,MT^{2.86} \tag{112}$$

où L et M sont exprimés en unités solaires.

Cependant, pour des modèles plus chauds, dans lesquels l'opacité est dominée par la diffusion électronique, il est préférable d'utiliser la relation

$$L = 10^{-10.78}\,MT^{3/2} \tag{113}$$

où L et M sont exprimés en unités solaires. Comme dans les modèles que nous étudions M varie peu nous supposerons M constant égal à 1.2 $M_\odot$.

Dans le premier cas, on peut écrire

$$\sigma''_F = H\left(7.9\,\frac{kT}{mc^2} + 0.2\right)\frac{T_1^{2.86}}{\sigma'^2} \tag{114}$$

T_1 est la température en unités de $\dfrac{m_e c^2}{k}$ et la constante H est donnée par

$$H = 10^{-21.62}\,\frac{M}{2\pi K_0}\left(\frac{m_e c^2}{k}\right)^{2.86}. \tag{115}$$

K_0 est de l'ordre de $2.42\ 10^{48}$ cgs pour une étoile de masse 1.2 $M_\odot$ ceci conduit à la valeur $H = 10^{-9.49}$.

Dans le deuxième cas, correspondant aux températures supérieures à 10^8 °K on a

$$\sigma''_F = H_1\left(7.9\,\frac{kT}{mc^2} + 0.2\right)\frac{T^{3/2}}{\sigma'^2} \tag{116}$$

où la constante H_1 est donnée par

$$H_1 = 10^{-10.78}\,\frac{M}{2\pi K_0}\left(\frac{m_0 c^2}{k}\right)^{1.5} \tag{117}$$

Pour $M = 1.2\ M_\odot$, elle prend la valeur

$$H_1 = 10^{-11.95}.$$

Le tableau (VII) donne les valeurs de σ''_F pour différentes valeurs de la température ainsi que le temps caractéristique de l'amortissement, exprimé en années.

E. *Comparaison des différents mécanismes, Conséquences concernant la structure des modèles.*

1° *Zone d'influence des différents processus d'amortissement. Amortissement total.*

La comparaison des tableaux V, VI et VII permet de délimiter en température et densité centrales plusieurs zones.

TABLEAU VII

Coefficient d'amortissement radiatif

T	Log σ''_F	Log $\left(\frac{1}{\sigma''_F}\right)^{\text{années}}$
—	—	—
10^7	— 20.5	13
5.10^7	— 18.62	11.1
10^8	— 18.13	10.63
3.10^8	— 16.42	8.92
5.10^8	— 15.79	8.29
8.10^8	— 14.88	7.38
10^9	— 14.51	7.01
2.10^9	— 13.39	5.89

Ainsi lorsque la densité reste faible, de sorte que les électrons ont des énergies très inférieures à l'énergie du seuil de capture les processus de radioactivité jouent un rôle très faible.

Dès que la température atteint 10^8 degrés, l'amortissement est essentiellement dû aux neutrinos émis par le plasma.

Quand la densité centrale de l'étoile s'élève les réactions de radioactivité deviennent plus importantes d'autant plus importantes que la température est plus élevée. Pour les étoiles de densités centrales les plus élevées c'est-à-dire les modèles voisins de l'instabilité dynamique et les températures très élevées (10^9 degrés) l'amortissement dû aux réactions de radioactivité β^- directes et inverses peut même devenir plus important que l'amortissement dû aux neutrinos de plasma.

On peut ainsi définir dans le plan log T, log ρ (fig. 6) les régions dans lesquelles l'un des trois processus d'amortissement est prédominant.

Puisque nous avons limité notre investigation en température à 10^9 degrés et que la densité centrale ne peut excéder la valeur critique $\rho_c = 10^{8.7}$ de l'instabilité dynamique nous pouvons dire que pour presque tous les modèles, l'amortissement est dû aux neutrinos de plasma dans le demi-plan supérieur II limité par la droite en traits pleins de la figure 6 et à l'amortissement radiatif des couches extérieures dans la partie inférieure I, sauf les plus chauds et les plus denses à la fois, pour lequel l'amortissement est dû aux radioactivités β^-.

La figure (5) donne la variation de

$$\sigma''_T = \sigma''_R + \sigma''_{p\nu} + \sigma''_{CE},$$

en fonction de la température, pour différent densités centrales. Le paramètre fondamental est en fait la température. Dans la première partie de la courbe correspondant aux basses températures l'amortissement est essentiellement radiatif et dès que $T > 5.10^7$ degré K, il devient entièrement dominé par la production des neutrinos.

2° *Sur la possibilité de sources d'énergie nucléaire dans une étoile dégénérée chaude.*

Dans la partie supérieure II du plan log ρ, log T l'existence d'un coefficient d'amortissement dû principalement à la production de neutrinos, qui est beaucoup plus élevé que celui qui a été calculé par Ledoux et Sauvenier Goffin (1950) permet de modifier sensiblement les conclusions de cet article concernant l'existence de réactions nucléaires dans de tels objets.

Les réactions nucléaires, fournissant de l'énergie directement transférée sous forme de photons au milieu du gaz stellaire environnant ont au contraire un rôle déstabilisateur. On peut leur associer un coefficient σ''_N du signe opposé à σ''_T c'est-à-dire négatif.

La stabilité de l'ensemble de l'étoile dépend du signe de la somme $\sigma''_N + \sigma''_T$ et l'étoile reste stable si $\sigma''_N > \sigma''_T$

Le taux de production d'énergie nucléaire peut se mettre sous la forme

$$\varepsilon_N = \varepsilon_0 \rho T^n. \tag{118}$$

La variation lagrangienne de ε_N au passage d'une perturbation en fonction des variations de densité et de température est

$$\frac{\delta\varepsilon_N}{\varepsilon_N} = \frac{\delta\rho}{\rho} + n\frac{\delta T}{T} = -3\xi\left(1 + n\frac{d\,\text{Log T}}{d\,\text{Log }\rho}\right). \tag{119}$$

Si l'étoile a une source d'énergie nucléaire, nous admettons que celle-ci fournit la partie essentielle de sa luminosité photonique c'est-à-dire que

$$\int^M 4\pi r^2 \rho\varepsilon_N\, dr = L.$$

On peut alors écrire le coefficient d'amortissement en fonction de la luminosité par

$$\sigma''_N = -\frac{3}{\xi}\left(\overline{\frac{\delta T}{T}\left(1 + n\frac{d\,\text{Log T}}{d\,\text{Log }\rho}\right)}\right)\frac{L}{\sigma^2 K_0} \tag{120}$$

La parenthèse représente la moyenne de la quantité

$$\frac{\delta T}{T}\left(1 + n\frac{d\,\text{Log T}}{d\,\text{Log }\rho}\right)$$

sur la zone de production d'énergie.

TABLEAU VIII

COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT GLOBAL EN FONCTION DE LA TEMPÉRATURE CENTRALE ET DE LA DENSITÉ CENTRALE DU MODÈLE

$$\sigma''_T = \sigma''_{pp} + \sigma''_R + \sigma''_F$$

LE TABLEAU DONNE $\log_{10} \sigma''_T$

x_0	Log ρ_c	10^7	5.10^7	10^8	3.10^8	5.10^8	8.10^8	10^9
5	8.40	— 20.5	— 18.6	— 16.54	— 13.25	— 12.24	— 11.52	— 11.24
6	8.64	— 20.5	— 18.6	— 16.66	— 13.81	— 12.99	— 11.43	— 11
7	8.84	— 20.5	— 18.6	— 16.92	— 13.31	— 12.09	— 11.08	— 10.89

TABLEAU IX

COEFFICIENT D'AMORTISSEMENT NÉGATIF σ''_{ND} ET σ''_{NE} DÛ AUX DIFFÉRENTS TYPES DE RÉACTIONS NUCLÉAIRES SE PRODUISANT DANS LES RÉGIONS DÉGÉNÉRÉES OU LES COUCHES EXTÉRIEURES

T	*pp*		CN		3α	
	Log $(-\sigma''_{ND})$	Log $(-\sigma''_{NE})$	Log $(-\sigma''_{\not\subset D})$	Log $(-\sigma''_{NE})$	Log $(-\sigma''_{ND})$	Log $(-\sigma''_{NE})$
10^7	— 18.85					
10^8	— 15.99	— 15.96	— 15.55	— 15.47	— 15.20	— 15.10
5.10^8		— 14.91	— 14.51	— 14.43	— 14.15	— 14.05
10^9		— 14.52	— 14.12	— 14.04	— 13.77	— 13.67

Soit

$$\int \left(1 + n \frac{d \text{ Log T}}{d \text{ Log } \rho}\right) \frac{\delta T}{T} \varepsilon_N 4\pi r^2 \rho \, dr = \overline{\frac{\delta T}{T} \left(1 + n \frac{d \text{ Log T}}{d \text{ Log } \rho}\right)} \text{ L.}$$

On doit ici, comme l'ont fait LEDOUX et SAUVENIER GOFFIN, distinguer deux cas selon que les réactions nucléaires se produisent dans la région dégénérée ou dans les couches extérieures. Car le comportement thermodynamique du gaz est différent dans les deux cas.

Dans la région dégénérée

$$\frac{d \text{ Log T}}{d \text{ Log } \rho} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \frac{\delta T}{T} = \xi.$$

Le coefficient d'amortissement nucléaire correspond est alors

$$\sigma''_{ND} = -\frac{3 + n}{\sigma'^2 K_0} \text{ L.} \tag{121}$$

Par contre dans les régions extérieures dont le comportement est voisin de celui d'un gaz parfait on peut admettre que $\dfrac{d \log T}{d \log \rho}$ varie peu au voisinage de 2/3.

L'oscillation homologue donne

$$\frac{\delta T}{T} = 2\xi$$

et

$$\left(1 + n \frac{d \text{ Log T}}{d \text{ Log } \rho}\right) \frac{\delta T}{T} = 2 \left(1 + \frac{2n}{3}\right) \xi.$$

Le coefficient σ''_{ND} correspondant prend une forme un peu différente de celle correspondant aux régions dégénérées

$$\sigma''_{NE} = -\frac{2}{3} \frac{3 + 2n}{\sigma'^2} \frac{L}{K_0}. \tag{122}$$

En utilisant les expressions de L en fonction de

la température définies par les relations (112) (113) (115) (117) utilisées pour le calcul de σ''_F on obtient :

$$\sigma''_{ND} = -\frac{H}{\sigma'^2}(3+n)\,T_1^{2.86}$$

$$\sigma''_{NE} = -\frac{H}{\sigma'^2}\frac{2}{3}(2n+3)\,T_1^{2.86}$$

pour les modèles de basse température centrale, et

$$\sigma''_{ND} = -\frac{H_1}{\sigma'^2}(3+n)\,T_1^{1.5}$$

$$\sigma''_{NE} = -\frac{H_1}{\sigma'^2}\frac{2}{3}(2n+3)\,T_1^{1.5}$$

pour les modèles dont la température centrale est supérieure à 100 millions de degrés.

Le tableau VIII donne les valeurs de log $(-\sigma''_N)$ pour les températures allant de 10^7 à 10^9 degrés pour les trois types de réactions nucléaires suivantes :

La combustion de l'hydrogène par le cycle proton-proton qui se produit au voisinage de 4 millions de degrés avec $n = 4$ (notée pp).

La combustion de l'hydrogène par l'intermédiaire du cycle de carbone (notée CN) qui se produit au voisinage de 25 millions de degrés avec $n = 16$.

La combustion de l'hélium (notée 3α) qui débute à 80 millions de degrés avec $n = 40$.

La comparaison des tableaux VIII et IX montre que pour des températures inférieures ou égales à 10^8 degrés toutes les réactions nucléaires entraînent une instabilité vibrationnelle puisque l'amortissement est toujours très faible.

Cependant dès 2.10^8 degrés les processus d'amortissement deviennent très importants ; ainsi tous les types de réaction nucléaire peuvent se produire à condition que la densité centrale de l'étoile ne soit cependant pas trop basse.

Ceci montre que les étoiles dégénérées peuvent être le siège de réactions thermonucléaires à condition qu'elles soient assez chaudes.

En effet, si la température centrale est supérieure à 100 millions de degrés l'ensemble de l'étoile est capable par modification du taux de production des neutrinos de plasmas, ou même dans certains cas par augmentation du taux des réactions de radioactivité β^- directes ou inverses, d'évacuer autant d'énergie qu'il en a été produit par les réactions nucléaires au cours d'une oscillation.

III. Aperçu sur l'évolution séculaire.

Les conclusions du deuxième paragraphe permettent de penser que des naines blanches assez chaudes pourraient être le siège de réactions thermonucléaires. Il n'est plus, à ce moment nécessaire de supposer que l'énergie libérée — luminosité photonique ou neutrinique — provient des réserves d'énergie thermique ou gravitationnelle de l'étoile. Cependant, il est impossible de donner une réponse définitive à cette question tant que des séquences évolutives calculées à partir de l'état homogène de la séquence principale n'auront pas permis d'atteindre ce stade final.

Dans un bref aperçu, nous comparerons tout d'abord les pertes photoniques et neutriniques puis nous estimerons des temps caractéristiques d'évolution dans le cas où les sources d'énergie ne sont pas thermonucléaires ; les temps deviennent alors des estimations minimum du temps d'évolution, qui seraient plus élevés s'il existe dans ces modèles des sources nucléaires d'énergie.

TABLEAU X

Luminosité photonique d'une étoile de 1 $M_\odot$ et d'une étoile de 0.6 $M_\odot$ en fonction de la température centrale

T_c	0.6 $M_\odot$	1 $M_\odot$
10^7	31.5	31.8
10^8	34.3	34.6
10^9	35.8	36

1) *Luminosité photonique et luminosité neutrinique.*

Dans le cas d'une étoile chaude $T > 10^8$ °K, la luminosité est reliée à la température centrale par la relation approchée (112)

$$L = 10^{-10.8}\,MT_c^{1.5}$$

et pour les modèles plus froids, cette relation est remplacée par (113)

$$L = 10^{-21.6}\,MT_c^{2.86}$$

Le tableau X donne pour une étoile de 0.6 $M_\odot$ et une étoile de 1 $M_\odot$ la luminosité photonique en fonction de la température centrale.

Comme nous l'avons vu précédemment les processus d'émission de neutrinos sont de deux types : déexcitation des oscillations de plasma ou réactions de radioactivité β^- directes ou inverses. Le taux de production d'énergie par le premier de ces processus est donné par l'expression (12). Avec les notations définies par les équations (19) et (22), l'énergie

transportée par les neutrinos des réactions de radioactivité β^-, par cm^3 et par unité de temps s'écrit

$$(123)\quad \varepsilon_{R\nu} = [(E_1 - \varepsilon_* W_1) X + (\varepsilon_* W_2 - E_2)(1 - X)] \frac{1}{A m_0}.$$

En supposant que les concentrations conservent leur valeur à l'équilibre puisque les réactions de radioactivité sont peu nombreuses, on a

$$(124)\quad X \simeq \frac{W_2}{W_1 + W_2} \quad \text{et} \quad 1 - X \simeq \frac{W_1}{W_1 + W_2}$$

soit

$$(125)\quad \varepsilon_{R\nu} = \frac{E_1 W_2 - E_2 W_1}{W_1 + W_2}.$$

Le tableau III donne les expressions de différentes quantités qui entrent dans l'expression de $\varepsilon_{R\nu}$ en fonction de ρ et T.

On en tire la valeur de $\varepsilon_{R\nu}$ dans les deux domaines $x_* < x$ et $x_* > x$,

(126)

$$x_* < x \quad \varepsilon_{R\nu} = \frac{2K}{A m_0} (kT)^3 \frac{x_*^2 x}{x + x_*} e^{\frac{x_* - x}{kT}} \left(\frac{c}{a} - x\right)$$

$$x_* > x \quad \varepsilon_{R\nu} = \frac{2K}{A m_0} (kT)^3 \frac{x_*^3}{x + x_*} e^{\frac{x_* - x}{kT}} \left(x - \frac{c}{a}\right).$$

Le tableau I donne pour $T = 10^9$ °K et $T = 10^8$ °K, les valeurs de $\varepsilon_{R\nu}$ et $\delta\varepsilon_{R\nu}$ définies par l'équation (10).

On remarque qu'entre $\delta\varepsilon_{R\nu}$ et $\mathcal{R}(\alpha)$ précédemment calculé, il existe la relation simple

$$\delta\varepsilon_{R\nu} = \frac{kT}{x_*} \mathcal{R}(\alpha).$$

Les courbes donnant $\varepsilon_{R\nu}$ et $\varepsilon_{p\nu}$ sont tracées sur la figure 2.

La figure 3 indique le domaine $\varepsilon_{R\nu} > \varepsilon_{p\nu}$ et les courbes $\varepsilon_\nu = C^{te}$ y sont tracées dans cette région.

On remarque que dans la région $8.8 < \log \rho < 9$ l'émission neutrinique due aux réactions de capture et de radioactivité domine. Le diagramme de la figure (3) ne tient compte que de la transition entre le sodium 23 et le néon 23 ; mais il devrait être complété par les contributions analogues des autres éléments ayant des seuils de capture plus grands. Des zones semblables à celle qui est délimitée ici viendraient se placer dans d'autres domaines de densité. Cependant, à partir de $\log_{10} \rho = 9$, qui correspond à une énergie cinétique des électrons de l'ordre de 5 MeV, de nombreux éléments ont des seuils de capture voisins et toute la région $\rho > 10^9$ g cm^{-3} sera couverte de telles bandes.

On peut donc dire qu'à partir de $\rho = 10^{8.8}$ gcm^{-3} l'énergie libérée sous forme de neutrinos est essentiellement due aux réactions de capture électronique, à condition d'avoir réalisé l'équilibre chimique correspondant aux taux de réactions nucléaires. Bien entendu ceci ne s'applique qu'au domaine de la dégénérescence forte ce qui limite le domaine de température au voisinage de 10^9 °K.

L'énergie libérée sous forme de neutrinos est entièrement perdue pour l'étoile. En effet le milieu stellaire est complètement transparent pour ces particules comme nous l'avons montré dans le paragraphe 1.

Dans ces conditions la luminosité neutrinique s'obtient directement par intégration du taux de production d'énergie calculé sur le modèle hydrostatique. On définit ainsi :

$$(127)\quad \int_0^R 4\pi r^2 \rho \varepsilon_{p\nu}\, dr = L_{p\nu}$$

$$(128)\quad \int_0^R 4\pi r^2 \rho \varepsilon_{p\nu}\, dr = L_{R\nu}.$$

Le tableau II donne les valeurs de $L_{p\nu}$ et $L_{R\nu}$ en fonction de la densité centrale et de la température de l'étoile. Il montre que la quantité d'énergie transportée par les neutrinos provenant des captures est toujours faible devant l'énergie transportée par les neutrinos provenant des plasmas, tant que la température reste inférieure à 10^9 °K. En effet, le taux de production d'énergie du premier processus n'est supérieur à celui du second que dans un très petit intervalle de densité, correspondant au voisinage du seuil, et, pour l'ensemble de l'étoile le second processus l'emporte.

Cependant lorsque la température dépasse 10^9 °K le taux de capture devient grand car la dégénérescence diminue, la sphère de Fermi se déforme beaucoup ; de nombreux électrons ont une énergie supérieure au seuil et peuvent être capturés, de même de nombreux niveaux de faible énergie restent inoccupés permettant à des réactions de radioactivité β^- directes de se produire.

Dans le domaine de température et de densité exploré ici on ne peut donc toujours négliger le processus de production de neutrinos par les réactions de radioactivité β^- devant la production des neutrinos de plasma dans le calcul de la luminosité neutrinique. C'est donc celui-ci que nous allons comparer à la luminosité photonique pour déterminer le taux de perte d'énergie du modèle.

La croissance très rapide de $L_{p\nu}$ avec la température entraîne l'existence d'une température T_L presque indépendante de la densité centrale et de la

TABLEAU XI

Luminosités neutriniques dues aux neutrinos de plasma et aux réactions de radioactivité β^- directes et inverses (en erqs/s)

TABLEAU XIA

(Neutrinos de plasma)

Log ρ_c	10^7	5.10^7	10^8	3.10^8	5.10^8	8.10^8	10^9
8.40	2.1 (25)		8.6 (34)	1.5 (37)	1.7 (39)	8.8 (39)	1.7 (40)
8.64	1.2 (25)		6.7 (34)	1.8 (38)	2.5 (39)	1.2 (40)	4.5 (40)
8.84	7.6 (24)	2.0 (30)	4.4 (34)	1.8 (38)	3.1 (39)	1.7 (40)	4.8 (40)
9.02	8 (24)	6.5 (31)	3.4 (35)	1.7 (38)	3.6 (39)	2.9 (40)	6.9 (41)

TABLEAU XIB

(Neutrinos des radioactivités)

Log ρ_c	10^7	5.10^7	10^8	3.10^8	5.10^8	8.10^8	10^9
8.40	—	—	—	8.2 (9)	7.8 (22)	1.5 (29)	6.5 (32)
8.64	—	—	—	2.0 (20)	8.0 (27)	1.1 (31)	2.0 (34)
8.84	—	—	4.6 (10)	4.9 (26)	4.8 (32)	4.2 (35)	6.2 (37)
9.02	—	4.6 (10)	4.2 (24)	1.3 (35)	9.0 (37)	3.6 (39)	2.0 (40)

Les tirets indiquent que la luminosité correspondante est inférieure à 10^8.

TABLEAU XII

Luminosité totale L en fonction de la température centrale et de la densité centrale de l'étoile

Log M	Log ρ_c	10^7	5.10^7	10^8	3.10^8	5.10^8	8.10^8	10^9
33.34	8.40	31.8	33.7	35.11	37.18	39.23	39.94	40.23
33.36	8.64	31.8	33.7	35.03	38.25	39.4	40.08	40.65
33.37	8.84	31.8	33.7	34.92	38.26	39.5	40.23	40.68
33.37	9.02	31.8	33.7	35.60	38.28	39.57	40.46	41.65

La luminosité est donnée par son logarithme.

masse de l'étoile telle que si la température centrale de l'étoile Tc est inférieure à T_L $L_{p\nu} < L_{p\hbar}$ et si $T_c > T_L$ $L_{p\nu} > L_{p\hbar}$. La comparaison des tableaux X et XI donne la valeur de T_L soit

$$T_L \simeq 8\ 10^7\ ^oK.$$

Pour les modèles dont la température centrale est supérieure à T_L le taux de production d'énergie dominé par les neutrinos de plasma croît très vite avec la température, beaucoup plus rapidement que dans les régions de température basse où comme l'indique la formule (112) la luminosité est proportionnelle à $T^{2.86}$.

Le tableau XII, qui donne la luminosité totale de l'étoile

$$L = L_{p\hbar} + L_{p\nu} + L_{R\nu}$$

en fonction de la température et de la masse de l'étoile montre très clairement cette variation. La figure (7) délimite dans le plan log T, log ρ les régions où l'un des processus est prédominant. La région de l'extrême droite ne peut être prolongée car la validité des calculs est limitée à une température de l'ordre de 2.10 °K.

2) *Les sources d'énergie des modèles.*

D'après les conclusions du paragraphe II les réactions nucléaires sont interdites pour les modèles stables dont la température centrale est inférieure à 2.10^8 °K ; ceux-ci semblent n'avoir comme source d'énergie pour alimenter leur perte par luminosité, que l'énergie gravitationnelle et l'énergie thermique.

Cependant si la température centrale est plus élevée, cette interdiction n'existe plus. La source d'énergie nucléaire, beaucoup plus efficace que l'énergie thermique ou l'énergie gravitationnelle contribue à la luminosité de l'étoile. Il est cependant impossible de déterminer précisément l'importance de cette source en l'absence de modèles évolués depuis les modèles homogènes aboutissant à ce stade ultime.

Énergie thermique et énergie gravitationnelle.

Il est difficile de donner une loi analytique reliant les variations de l'énergie thermique à celles de l'énergie gravitationnelle, en particulier dans le domaine des modèles proches de la limite d'instabilité dynamique.

Cependant, pour les modèles d'étoiles dont la masse est nettement inférieure à la masse limite, l'énergie gravitationnelle varie peu, comparativement à l'énergie thermique, et l'on peut admettre que la source dominante d'énergie est thermique.

TABLEAU XIII

Refroidissement vers l'instabilité dynamique

T_l e °K	α_l	$\Delta(\Omega + W)$ en 10^5 ergs	L_l ergs	Log τ_0 années	Log V cgs
—	—	—	—	—	—
5 10^8	3.3	.002	39.5	1.2	— 1.6
2 10^8	3.5	.003	38.4	3.8	— 4
10^8	3.6	.004	35.0	5.7	— 5.8
5 10^7	4	.003	33.7	6.7	— 6.8

Cette image n'est plus du tout correcte au voisinage de la limite d'instabilité où la densité centrale donc aussi l'énergie gravitationnelle peut varier sensiblement au cours du refroidissement. Considérons, par exemple, le cas de l'étoile de 1.2 $M_\odot$ constituée de magnésium 24 qui atteint la limite de stabilité pour une temperature de 10^9 °K et un rayon de 2.4 10^{-3} $R_\odot$. Le tableau XIII qui donne les valeurs de l'énergie gravitationnelle Ω et de l'énergie interne W montre que la contraction, par accroissement de densité, augmente l'énergie interne malgré le refroidissement. Le rôle de la température est donc ici secondaire alors qu'il était fondamental pour les modèles de masse plus faible.

On peut même dire que l'augmentation d'énergie interne est du même ordre de grandeur que la diminution de l'énergie gravitationnelle de telle sorte que la relation approximative

$$\Delta(\Omega + W) = 0.1\ \Delta\Omega \qquad (129)$$

est vérifiée au voisinage de la limite d'instabilité.

L'énergie perdue est donc très inférieure à la variation d'énergie gravitationnelle.

L'image de la naine blanche qui se refroidit à rayon constant c'est-à-dire sans variation d'énergie gravitationnelle reste correcte, en ordre de grandeur, seulement pour les modèles de masse faible, tandis que pour les masses élevées le rôle de la température est négligeable devant celui de la contraction.

3) *Échelle de temps de l'évolution.*

Il est actuellement impossible de définir quelles peuvent être les sources d'énergie de modèles correspondant à des stades très évolués puisque l'on ne connait pas le trajet suivi par les modèles pour atteindre ce stade. Pourtant une estimation de

l'échelle de temps de l'évolution nécessite la connaissance de l'ensemble des réserves d'énergie de l'étoile. Il nous sera donc impossible de faire cette estimation, mais seulement de donner une limite inférieure de cette échelle de temps en ne tenant compte que de l'énergie thermique et de l'énergie gravitationnelle.

Comme nous venons de le voir, on doit considérer deux cas fondamentalement différents selon la masse de l'étoile.

Le premier est le cas classique de la naine blanche de faible densité centrale qui se refroidit sans variation d'énergie gravitationnelle.

Soit ΔW la perte d'énergie thermique correspondant au refroidissement ΔT, pendant le temps Δ

$$\Delta W = \int 4\pi r^2 \rho \, dr \, c_v \, \Delta T. \tag{130}$$

D'après BAGLIN (1967), la conductivité thermique de la matière fortement dégénérée s'écrit sous la forme :

$$c_v = c_{ve} + c_{vi} = \frac{3}{2}\frac{R}{A}(1 + 1.08\ 10^{-7}\ ZTx^{-1}). \tag{131}$$

Avec $A = 23$ et $Z = 12$ on obtient :

$$c_v = 5.3\ 10^7\ (1 + 1.1\ 10^{-6}\ Tx^{-1}) \tag{132}$$

Nous admettrons que x ne varie pas beaucoup au cours du refroidissement et que l'on peut écrire par conséquent

$$\Delta W = \bar{c}_v M \Delta T. \tag{133}$$

Pour une étoile de $0.7\ M_\odot$ avec $\rho_c = 10^9$ gcm^{-3} on peut prendre

$$\bar{c}_v = c_v(x = 1) = 5.3\ 10^7\ (1 + 1.1\ 10^{-6}\ T)$$

Cette source d'énergie étant la seule présente, on peut écrire la relation approchée entre la luminosité, ΔW et Δt

$$L \simeq \frac{\Delta W}{\Delta t}. \tag{134}$$

Tant que $T \leqslant 5.\ 10^7$ degrés la luminosité est principalement due aux photons. A l'aide de la relation (112) on peut estimer l'échelle de temps de la décroissance de la température τ, qui peut aussi être interprété comme la durée de vie du modèle à la température T.

Suivant SCHWARZCHILD (1958) :

$$\tau = \int_\infty^T L^{-1}\, dW \tag{135}$$

qui représente théoriquement le temps de refroidissement depuis une température infinie ; il est malgré tout un bon ordre de grandeur de la durée de vie car le domaine de température voisin de T est prédominant dans l'intégrale.

On obtient alors :

$$\tau = 10^{26.14}\ (1 + 0.65\ 10^{-7}\ T)\ T^{-1.86} \tag{136}$$

Au-dessus de $5.\ 10^7$ degrés la luminosité est fortement influencée par l'émission des neutrinos, pour être, dès 10^8 °K, entièrement due à ceux-ci. Elle ne peut être représentée par une formule analytique approchée du type (112). Nous calculerons un ordre de grandeur de τ à l'aide de la relation (126).

Le tableau XIV donne les valeurs de la durée de vie, en années, en fonction de la température centrale. Aux hautes températures, la capacité calorifique croît avec celle-ci ; ceci entraîne que la durée de vie décroît d'abord et croît à nouveau à partir de 8.10^8 degrés.

Le schéma décrit ici est analogue à celui donné par SCHWARZCHILD (1958). Mais les durées de vie ne sont les mêmes que pour les très basses températures lorsque les neutrinos ne jouent aucun rôle, sinon dès que $T \geqslant 5\ 10^7$ degrés elles sont considérablement réduites comme cela a été indiqué par CHIN, CHIU, STOTHERS (1965) pour des modèles analogues quoique moins denses.

Pour les étoiles de masse voisine du maximum, l'énergie totale diminue en même temps que l'énergie gravitationnelle comme l'indique la formule approchée (121). Dans ce cas nous estimerons le temps t nécessaire pour atteindre la limite d'instabilité. A chaque instant, on a :

$$\frac{d}{dt}(\Omega + W) = L \tag{137}$$

TABLEAU XIV

DURÉE DE VIE D'UNE ÉTOILE DE $0.8\ M_\odot$ EN FONCTION DE SA TEMPÉRATURE CENTRALE

T_c	Log τ années
—	—
10^6	10.94
10^7	9.14
10^8	6.9
$5\ 10^8$	4.1
10^9	3.3

et le temps nécessaire pour que l'étoile se refroidisse depuis la température T_0 jusqu'à la température T_1 est :

$$(138) \qquad t_{01} = \int_{T_0}^{T_1} \frac{\partial(\Omega + W)}{\partial T} L^{-1} \, dT$$

$\partial \dfrac{(\Omega + W)}{\partial T} L^{-1}$ croît très rapidement quand T diminue, à peu près comme L^{-1} ; donc les premières phases du refroidissement sont très courtes alors que la contribution principale de cette intégrale est donnée par le voisinage de T_0.

Soit T_l la température correspondant à la limite stabilité. Nous définirons le temps d'évolution comme le temps de refroidissement de la température $2\,T_l$ jusqu'à la limite T_l ; ceci donne une bonne approximation du temps t puisque la luminosité est très grande pour les très hautes températures.

Définissons au voisinage de T_l un exposant α_l par

$$(139) \qquad \frac{L}{L_l} = \left(\frac{T}{T_l}\right)^{\alpha_l}$$

α_l est fonction de T_l. Le tableau XIII donne α_l pour différentes valeurs de T_l. On a alors :

$$(140) \quad t = \int_{2T_l}^{T_l} L_l^{-1} \left(\frac{T}{T_l}\right)^{-\alpha_l} \frac{\partial(\Omega + W)}{\partial T} \, dT$$

une valeur approchée de t est donnée par

$$(141) \quad t = L_l^{-1} \left(\frac{2T_l}{T_l}\right)^{-\alpha_l + 1} \frac{1}{|-\alpha_l + 1|} \Delta(\Omega + W)$$

où $\Delta\,(\Omega + W)$ est la diminution d'énergie totale entre les deux états du même modèle aux températures respectives $2T_l$ et T_l

$$(142) \quad \Delta(\Omega + W) = |(\Omega + W)_{2T_l} - (\Omega + W)_{T_l}|$$

soit finalement :

$$(143) \qquad t = \frac{2^{1-\alpha_l}}{\alpha_l - 1} \Delta(\Omega + W) \, L_l^{-1}.$$

Dans la formule (135) le terme L_l^{-1} est celui qui varie le plus avec la température ; ceci montre que les modèles qui atteignent la limite d'instabilité avec la température la plus élevée sont ceux qui ont la durée de vie plus courte ; bien que la masse totale ne varie pas beaucoup d'un modèle à l'autre, on peut cependant dire que ces modèles sont les plus massifs.

Le tableau XIII donne en fonction de T_l les valeurs de t ainsi que de $\Delta(\Omega + W)$.

L'estimation de cette échelle de temps permet d'obtenir un ordre de grandeur de la vitesse à laquelle ces étoiles atteignent l'instabilité dynamique. En effet, au voisinage de cette frontière, on peut admettre que l'énergie gravitationnelle est voisine de celle du polytrope 3.

$$(144) \qquad \Omega = -\frac{3}{2} \frac{GM^2}{R}$$

Donc sa variation en fonction de celle du rayon est donnée par :

$$(145) \qquad \Delta\Omega = \frac{3}{2} \frac{GM^2}{R^2} \Delta R.$$

En utilisant la relation (121) on peut relier les variations de rayon aux variations d'énergie totale par :

$$(146) \qquad \frac{\Delta R}{\Delta(\Omega + W)} = \frac{2R^2}{3GM^2} \times 10$$

on obtient la variation de R correspondant au refroidissement depuis $2T_l$ jusqu'à T_l ; l'estimation du temps nécessaire à cette transformation permet de déterminer la vitesse moyenne de contraction sur cet intervalle. C'est cette vitesse qui est tabulée en dernière colonne du tableau XIII, exprimée en unités c.g.s. Elle reste toujours assez faible ce qui justifie l'utilisation de modèle statique même au voisinage de l'instabilité.

L'ensemble des résultats nouveaux obtenus dans cet article repose essentiellement sur la production des neutrinos par l'interaction $(e\nu_l)$ $(e\nu_l)$. Ce processus, contrairement aux réactions de radioactivité β^- qui lui sont comparées, ne dépend pas de la composition chimique du milieu mais seulement de la densité et de la température des électrons libres ; il est donc à peu près indépendant du passé nucléaire de l'étoile que nous connaissons si mal.

La durée de vie des objets chauds étant très courte il n'y a aucun espoir de les observer. Les naines blanches déterminées par les observateurs ont en général des luminosités très faibles et correspondent aux objets de plus basse température de cette étude ($T = 10^6$ à 10^7 degrés), alors que les modèles de température plus élevée ne sont identifiables à aucun objet astronomique.

Stothers (1966) a cherché à définir parmi les objets très bleus une nouvelle classe d'étoiles située dans le diagramme de Hertzprung-Russell entre les noyaux de nébuleuses planétaires et les naines blanches, qu'il a appelée les « naines ultraviolettes ».

Ce sont des objets de température effective élevée et de durée de vie très courte puisqu'ils sont très peu nombreux. Les objets décrits ici pourraient appartenir à cette classe ; leur température effec-

tive étant la plus élevée et leur durée de vie la plus courte.

Si leur masse est inférieure à la masse limite ils représentent les stades précédant le refroidissement classique des naines blanches. Si leur masse est supérieure à la limite, ce sont les objets, qui, assez rapidement vont atteindre la limite de stabilité dynamique et subir un effondrement gravitationnel.

APPENDICE A

Comportement du gaz dégénéré au passage d'une perturbation

Soit une perturbation de la forme :

$$\frac{\delta r}{r} = \xi\, e^{i\sigma t}. \tag{38}$$

L'équation de continuité permet d'écrire :

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \left(-3\xi + r\frac{d\xi}{dr}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\xi) \tag{A.1}$$

Dans le cas des naines blanches il a été montré par Sauvenier-Goffin (1949), que la fonction propre ξ correspondant au mode fondamental dans le cas adiabatique est à peu près constante en fonction de r dans les régions profondes, fortement dégénérées. On peut donc écrire :

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -3\xi = -3\frac{\delta r}{r}. \tag{A.2}$$

Le gaz dégénéré a été décrit à l'aide du paramètre x lié à ρ et T par la relation

$$\rho = \mathcal{B}\mu_e x^3(1 + \lambda T^2). \tag{A.3}$$

En première approximation nous négligerons le terme en T^2 ; il reste alors

(A.4)

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = 3\frac{\delta x}{x} + \frac{\delta\mu_e}{\mu_e} \text{ avec } \mu_e = \frac{AN_i}{N_e} = \frac{A}{Z + X - 1}$$

soit

$$\frac{\delta\mu_e}{\mu_e} = \frac{\delta X}{Z + X - 1}$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = 3\frac{\delta x}{x} + \frac{\delta X}{Z + X - 1} \tag{A.5}$$

or

$$\frac{\delta X}{Z + X - 1} \sim \frac{\delta X}{Z - 1} = \frac{b}{Z - 1}\frac{\delta\rho}{\rho}.$$

La valeur de b extraite du tableau II montre que $\frac{b}{Z} \leqslant 3$ et que le terme provenant de la variation de μ_e dans $\frac{\delta\rho}{\rho}$ est négligeable.

Nous utiliserons ultérieurement l'expression approchée :

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = 3\frac{\delta x}{x}. \tag{A.6}$$

De plus, en négligeant les termes dépendant de la température dans l'équation d'état on a :

$$\frac{d\,\mathrm{Log}\,T}{d\,\mathrm{Log}\,\rho} = \frac{x^2 + 2}{3(x^2 + 1)} = t_* \tag{A.7}$$

et

$$\frac{d\,\mathrm{Log}\,T}{d\,\mathrm{Log}\,x} = 3t_* = t \tag{A.8}$$

et pour x grand :

$$t \simeq 1. \tag{A.9}$$

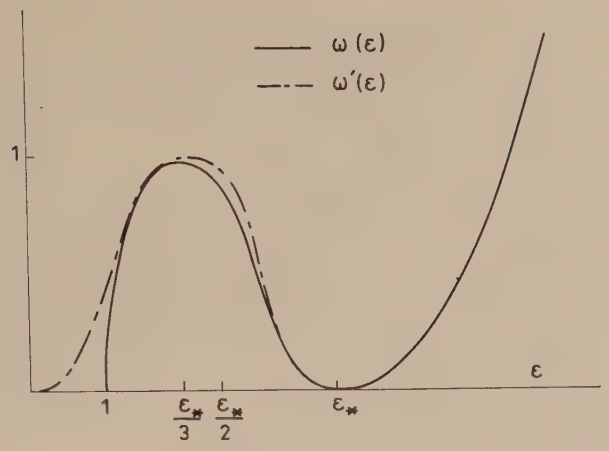
APPENDICE B

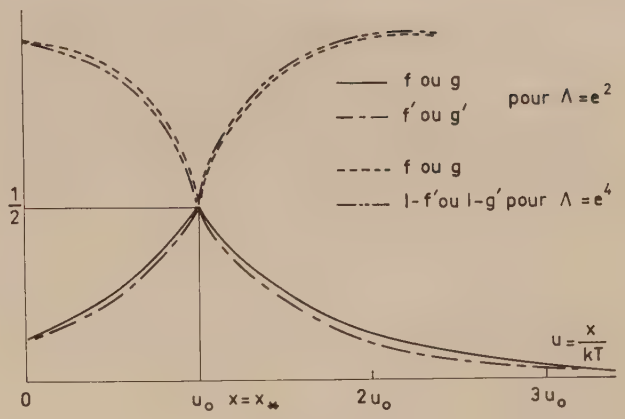
Expressions analytiques intervenant dans le calcul du taux de production d'énergie par radioactivités β^- directes et inverses.

Les expressions exactes ne sont pas intégrales analytiquement. Pour pouvoir utiliser plus facilement ces grandeurs il nous a paru préférable d'avoir recours à certaines simplifications qui permettent le calcul analytique plutôt que de conserver les expressions exactes qui devraient être l'objet d'un long calcul numérique.

La forme des expressions telles que W_1, W_2, E_1, E_2 posent deux problèmes :

1° le radical $\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ ne permet pas l'intégration mais comme les énergies varient sur un grand domaine $\varepsilon_* \gg 1$ on peut, même pour W_2 qui est





sommé de 1 à ε_*, remplacer $\sqrt{\varepsilon^2 - 1}$ par ε sans modifier beaucoup le résultat.

En effet, au voisinage de $\varepsilon = 1$

$$\omega_2(\varepsilon) = K\sqrt{\varepsilon^2 - 1}\, h(\varepsilon)$$

où $h(\varepsilon)$ tend vers zéro quand $\varepsilon \to 1$.

La figure B1 donne les graphes de $\omega(\varepsilon)$ et de

$$\omega'(\varepsilon) = (\varepsilon^2 - 1)^{-1/2}\, \varepsilon\omega(\varepsilon).$$

2° la forme du degré d'occupation des niveaux électroniques qui comprend le dénominateur

$$\frac{1}{d} = 1 + \frac{1}{\Lambda}\, e^{E/kT}$$

est représentée par une fonction de puissances de E et d'exponentielles pour permettre l'intégration.

On définit d'abord e_0 par la relation

$$\frac{1}{\Lambda}\, e^{0e/kT} = 1, \quad \varepsilon_0 = e_0 + 1$$

qui sépare les domaines où $1 < \frac{1}{\Lambda}\, e^{E/kT}$ c'est-à-dire où le terme exponentiel est prépondérant et la région où $1 > \frac{1}{\Lambda}\, e^{E/kT}$ où l'exponentielle devient négligeable devant 1.

Cette grandeur e_0 est utilisée dans la dérivation de l'équation du gaz dégénéré ; c'est elle qui définit le paramètre x.

En effet, en unités de $m_e c^2$, on a :

$$\log \Lambda = \frac{e_0}{kT} = \frac{x}{kT}.$$

Dans les deux intervalles $(1, \varepsilon_0)$ et $(\varepsilon_0, +\infty)$ on peut obtenir une expression approchée de d par le produit d'une exponentielle et d'une fraction rationnelle en ajustant les valeurs en 2 points : par exemple, les limites de l'intervalle.

pour

$$\varepsilon \in [1, \varepsilon_0] \quad d = \frac{\Lambda e_0}{e_0(1 + \Lambda) + (\Lambda - 1)\, E}$$

et pour

$$\varepsilon \in [e_0, +\infty[\quad d = \Lambda\, e^{-E/kT}\, \frac{E}{E + e_0}.$$

Dans l'intervalle $\varepsilon \in [1, \varepsilon_0]$, on a :

$$f(E) = \frac{\frac{1}{\Lambda}\, e^{E/kT}}{1 + \frac{1}{\Lambda}\, e^{Ek/T}}$$

$$\simeq e^{E/kT}\, \frac{e_0}{e_0(1 + \Lambda) + (\Lambda - 1)\, E} = f'(E)$$

et dans l'intervalle $\varepsilon \in [\varepsilon_0, +\infty[$

$$g(E) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\Lambda}\, e^{E/kT}} \simeq \Lambda\, e^{-E/kT}\, \frac{E}{E + e_0} = g'(E).$$

Les mêmes approximations sont utilisées pour les fonctions dans les intervalles complémentaires de la façon suivante :

dans

$$[1, \varepsilon_0] \quad g(E) = 1 - f'(E)$$

dans

$$[\varepsilon_0, +\infty] \quad f(E) = 1 - g'(E).$$

Les graphes des fonctions $f(E)$, $g(E)$ et de leurs approximations $f'(E)$ et $g'(E)$ sont donnés sur la figure B2.

Ordre de grandeur de l'approximation faite.

Étudions par exemple l'approximation de la fonction $f'(E)$ dans l'intervalle $[1, \varepsilon_0]$ par la fonction $f'(E)$ pour ce faire nous utiliserons la variable

$$t = \frac{1}{\Lambda} e^{E/kT}.$$

$$f(t) = \frac{t}{1+t} \qquad f'(t) = \frac{t}{2 + \frac{\log t}{\log \Lambda}}$$

t varie dans l'intervalle $\left[\frac{1}{\Lambda}, 1\right]$.

Soit la variation :

$$\Delta f(t) = f(t) - f'(t) \begin{cases} \Delta f\left(\frac{1}{\Lambda}\right) = -\frac{1}{\Lambda^2}\frac{1}{1+\frac{1}{\Lambda}} \\ \Delta f(1) = 0 \end{cases}$$

différence entre la valeur réelle et la valeur approchée

$$\frac{d\,\Delta f(t)}{dt} \simeq \frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{2 + \frac{\mathrm{Log}\ t}{\mathrm{Log}\ \Lambda}} < 0$$

donc $\Delta f(t)$ est décroissant.

Soit

$$|\Delta f)t)| \leqslant \Delta f\left(\frac{1}{\Lambda}\right) < \frac{1}{\Lambda^2}$$

l'erreur sur l'intégrale du type de W_2 est inférieure à

$$\frac{K}{\Lambda^2}\int^{\varepsilon_0} \varepsilon^2(\varepsilon - \varepsilon_*)^2\, d\varepsilon$$

donc inférieure à :

$$\Delta = \frac{K x^5}{5\Lambda}.$$

Dans le cas le plus défavorable $x_* > x$ où W_2 est très petit on a encore

$$\frac{\Delta}{W_2} \simeq \frac{1}{10}\frac{x^3}{(kT)^3} e^{\frac{-x+x_*}{kT}}.$$

Mais

$$e^{-\frac{x}{kT}} < \left(\frac{x}{kT}\right)^{-3} \text{ dès que } \frac{x}{kT} > 1$$

ce qui est réalisé ici.

Donc :

$$\frac{\Delta}{W_2} < e^{-\frac{x_*}{kT}}$$

$$\frac{x_*}{kT} > 20 \text{ donc } \frac{\Delta}{W_2} < 10^{-4}$$

ce qui justifie l'ensemble des approximations et des développements limités utilisés.

Remarquons qu'une approximation de l'ordre de $e^{-\frac{x}{kT}}$ est aussi utilisée dans la dérivation de l'équation d'état à l'aide du lemme de Sommerfeld.

Le calcul des expressions de W_1, W_2, E_1, E_2, est long et fastidieux. Nous ne donnerons ici que des indications.

Lorsque l'intervalle d'intégration recouvre la valeur ε_0 il faut séparer en deux intervalles ayant la borne commune ε_0 et utiliser dans chaque intervalle l'approximation qui convient.

Par un changement de variable approprié, différent selon le cas, on se ramène toujours à une intégrale du type

$$A = \int_{a_1}^{a_2} e^u \frac{p(u)}{u}\, du \text{ ou bien } B = \int_{b_1}^{b_2} e^{-u} \frac{p(u)}{u}\, du$$

dont la solution s'exprime sous la forme

$$A = e^u(q(a_2) - q(a_1)) + \lambda[E_i(a_2) - E_i(a_1)]$$

avec

$$E_i(x) = \int_{-\infty}^{x} e^t\, t^{-1}\, dt$$

ou

$$B = -e^{-u}(q'(b_2) - q'(b_1)) - \mu[E_1(b_2) - E_1(b_1)]$$

avec

$$E_1(x) = \int_x^{\infty} e^{-t}\, t^{-1}\, dt$$

q et q' sont des polynômes en x.

a_1 et a_2 prennent, selon les cas les valeurs $\frac{\varepsilon_0}{kT}$, $\frac{\varepsilon_1}{kT}$ ou $\frac{1}{kT}$.

Ils sont toujours grands devant 1 et l'on ne conservera dans q et q' que les termes de plus haut degré.

W_1, W_2, E_1, E_2, sont alors mis sous la forme sous laquelle ils sont donnés dans le tableau III, pour plus d'homogénéité on a remplacé ε_0 par x et ε_* par $\varkappa_*$.

Les expressions A et B ont une forme analytique encore difficilement utilisable. On peut cependant, en tenant compte des conditions physiques rencontrées, apporter quelques simplifications.

Ainsi, $x/kT \gg 1$ et même $1/kT \gg 1$ permet de ne conserver qu'un seul terme exponentiel, dans chaque expression, et d'utiliser le développement en série des fonctions $E_1(x)$ et $E_i(x)$:

$$E_1(x) = \frac{e^{-x}}{x}\left[1 + \sum_{m=1}^{k} (-1)^m \frac{m!}{x^m} + \mathcal{R}(k, x)\right]$$

avec

$$|\mathcal{R}(k, x)| < \frac{(k+2)!}{x^{k+1}}$$

et de même

$$\mathrm{E}_n(x) = \frac{e^x}{x}\left(1 + \sum_{m=1}^{k} \frac{m!}{x^m}\right)$$

ce qui conduit aux expressions données dans les tableaux B1 et B2 dans lesquels les expressions a et c sont des fonctions de x et x_* seulement, définies de la façon suivante :

$$a = \frac{1}{10}(x_* - x)^3(6x^2 + 3x\,x_* + x_*^2)$$

$$c = \frac{1}{60}(x_* - x)^3(10x^3 + 18x_*\,x^2 - 21x_*^2\,x + 13x_*^3)$$

a' et c' sont leurs dérivées par rapport à x

$$a' = -x^2(x - x_*)^2$$

$$c' = -x^3(x - x_*)^2.$$

Manuscrit reçu le 14 mai 1967.

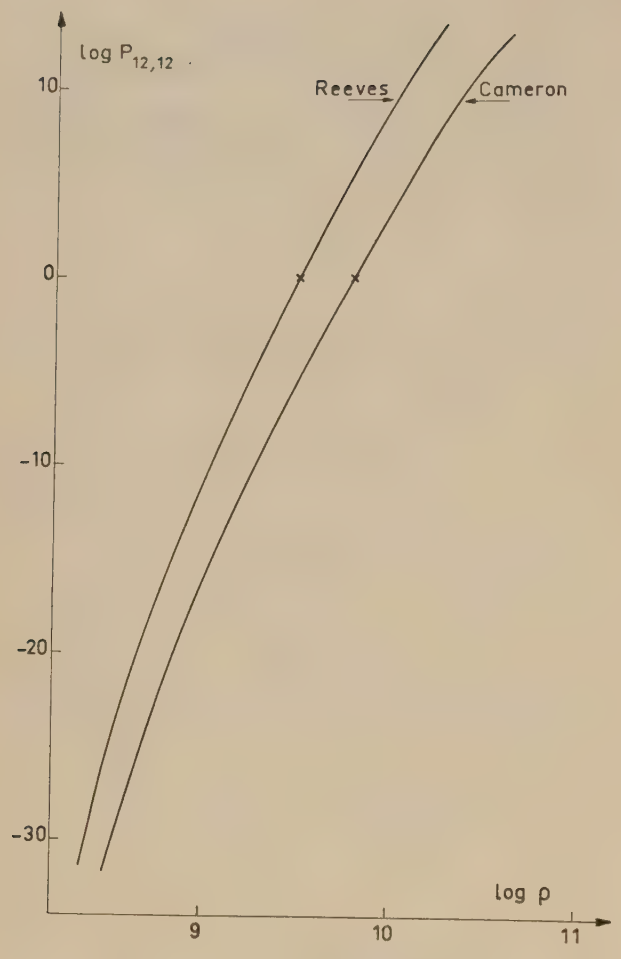


FIG. 1. — Taux de réaction $C^{12} + C^{12}$.

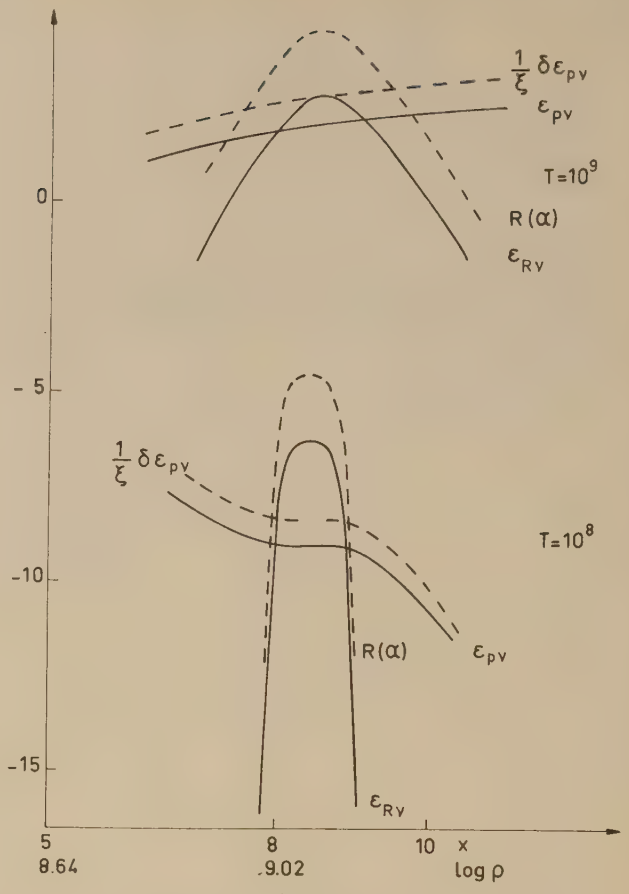


FIG. 2.

FIG. 2. — Taux de production d'énergie par les neutrinos de plasmas et les réactions de radioactivité β—. Variation du taux de production d'énergie au passage d'une perturbation $\delta\varepsilon_{pv}$ et $\delta\varepsilon_{Rv}$ pour T = 10^8 et T = 10^9.

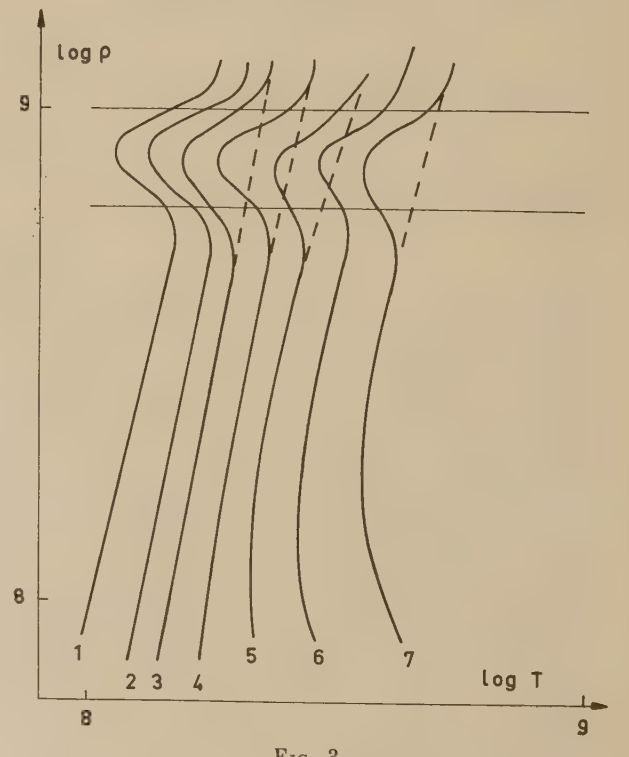


FIG. 3.

FIG. 3. — Taux de production de neutrinos ε_ν pour un plasma de Na^{23} ; les chiffres donnent $\log_{10} \varepsilon_\nu$.

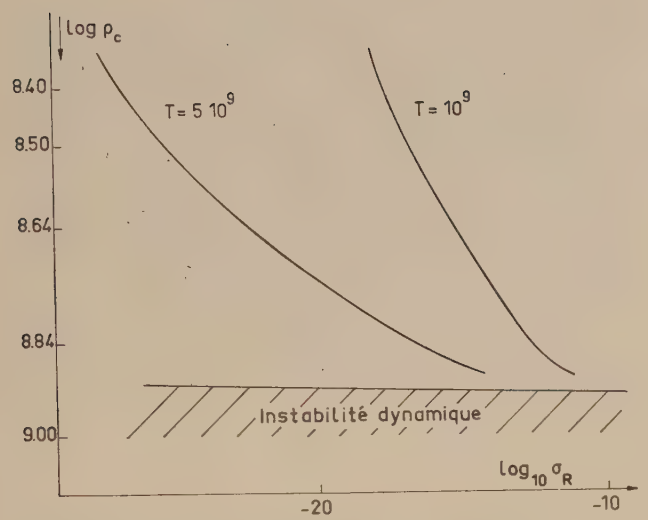


FIG. 4. — Variation du coefficient d'amortissement en fonction de la densité centrale pour T = 5 10^8 et T = 10^9

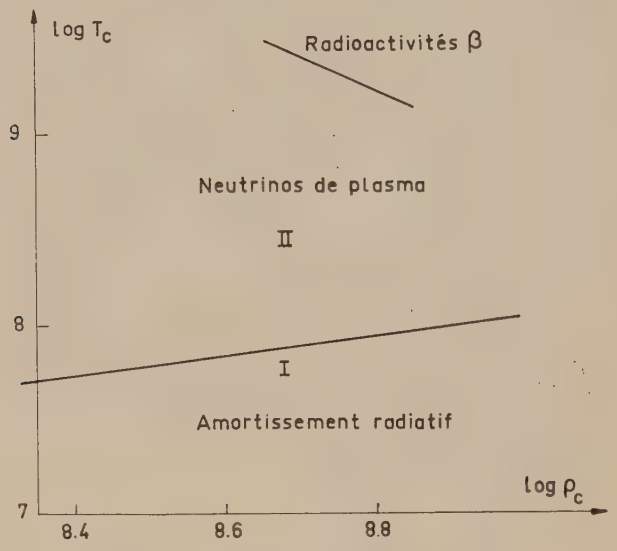


FIG. 6. — Régions du plan log T_c, log ρ_c où chaque processus d'amortissement domine.

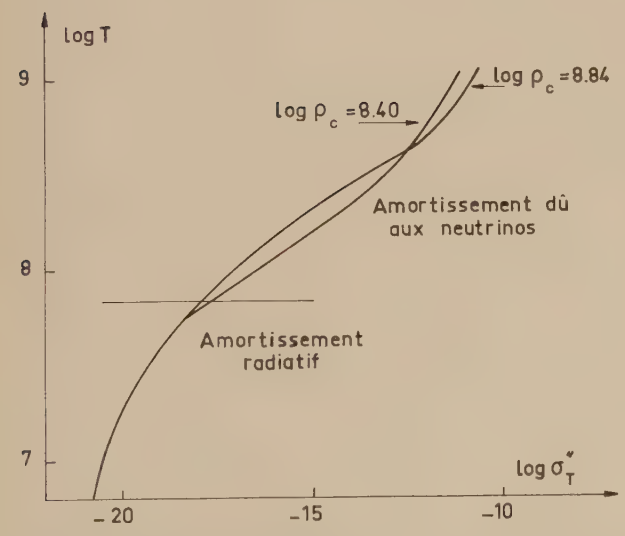


FIG. 5. — Variation du coefficient d'amortissement en fonction de la température pour différentes densités centrales.

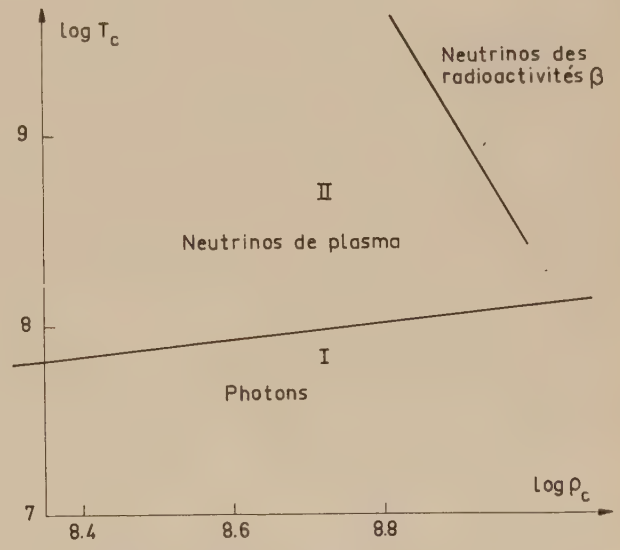


FIG. 7. — Les régions du plan log T_c, log ρ_c où les différents processus de perte d'énergie dominent.

BIBLIOGRAPHIE

BAGLIN A., 1965, *CRAS* **260**, 2424.

BAGLIN A., 1966, *Ann. d'Astr.*, **29**, 103.

BAGLIN A., 1967, *Ann. d'Astr.* (à paraître).

BAHCALL J. N., 1964, *Phys. Rev.* **130**, B 137, *Phys. Rev.* **136**, B 1164 ; *Ap. J.* **139**, 318.

BAHCALL J. N. et FRANTSCHI S. C., 1964, *Phys. Rev.* **136**.

CAMERON A. G. W., 1959, *Ap. J.*, **130**, 916.

CHANDRASHEKAR S., 1939, An introduction to the study of stellar structure university of Chicago Press.

CHIN C. W., 1965, *Ap. J.*, **142**, 1481.

CHIN C. W., CHIU H. Y., STOTHERS R., 1966, *Ann. of Physique* **39**, 280.

DEINZER W. et SALPETER E. E., 1964, *Ap. J.*, **140**, 499 ; 1965, *Ap. J.* **142**, 813.

ENDT P. M. et VAN DER LEUN C., 1962, *Nuclear Physics*, **34**, 1.

FRANCK-KAMENETSKY D., 1966, *JETP*, URSS.

KOTHARI, 1932, *M. N.* **13**, 61.

LEDOUX P. J. et WALRAVEN T., 1958, *Hand. der Phys.* **51**, Variable stars.

LEDOUX P. J. et SAUVENIER GOFFIN, 1950, *Ap. J.*, **111**, 611.

MARSHAK R. E., 1940, *Ap. J.*, **92**, 321.

PAGUROVA, 1961, Tables of the exponential integral.

REEVES H., 1965, Review of nuclear energy sources. Pergamon Press, *Stars and stellar systems*, vol. VIII ; 1962, *Ap. J.*, **135**, 779 ; 1964, Nucleo synthèse et évolution stellaire. Bruxelles.

ROSSELAND S., 1949, The pulsation theory of variable stars. Oxford. Clarendon Press.

SAUVENIER-GOFFIN E., 1949, *Ann. d'Ap.*, **12**, 39, (149).

SCHATZMAN E., 1952, *Ann. d'Ap.*, **15**, 361.

SCHATZMAN, 1948, *J. phys. et Rad.*, **9**, 46.

SCHWARZCHILD, 1958, Structure and evolution of the stars. Princeton. University Press.

STOTHERS R., 1966, *A. J.*, **71**, 943.

WU C. S. and MOSZKOWSKI S. A., 1966, Beta decay ; John Wiley N. Y.

Imprimerie TAFFIN-LEFORT, à Lille (France), — Hors-texte : BRUNISSEN, Paris, — *Published in France*,

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Les étoiles β Canis Majoris

Vu et approuvé :
Paris, le 16 Novembre 1967
Le Doyen de la Faculté des Sciences,
M. Zamansky.

Vu et permis d'imprimer :
Le Recteur de l'Académie de Paris,
Jean Roche.